Autour de la notion de fonction

Ce cours vous est proposé par Odile Brandière, Université de Paris Sud 11, UFR Jean Monnet et AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Table des matières

Introduction

Objectif de la leçon : Rappeler des définitions et des notions essentielles à la compréhension des leçons suivantes et des mathématiques en général.

Ce vocabulaire a déjà été vu en lycée et cette leçon n'est constituée que de rappels. Ainsi cette leçon revisite les notions de :

Fonction, ensemble de départ, ensemble d'arrivée, image, antécédent, variable, argument, ensemble de définition, ensemble image, graphe, représentation graphique, application, injection, surjection, bijection, fonction réciproque et composition de fonctions.

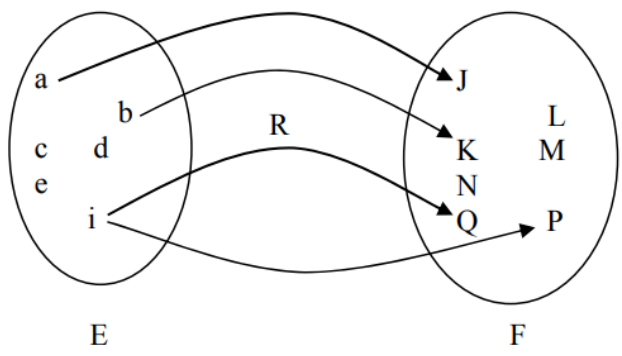
Avertissement : Dans le langage courant, le mot fonction est synonyme de correspondance et de mise en relation (la réussite d'un étudiant est fonction de son travail).

En mathématique, le mot fonction est plus restrictif, c'est un cas particulier de relation (ou de correspondance).

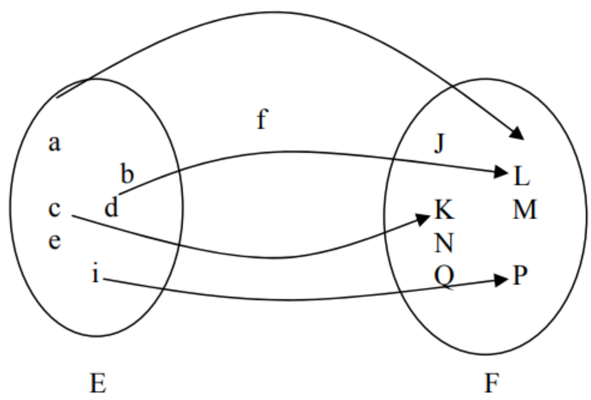
Notion de fonction – Définitions

Fonction

Définition : Une correspondance f d'un ensemble de départ **E** vers un ensemble d'arrivée **F** est une fonction si elle associe à tout élément de **E**, au plus un élément de **F**.

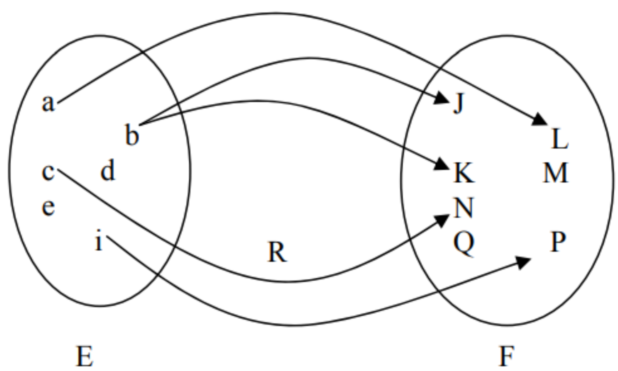


La relation R n'est pas une fonction.



La relation f est une fonction de E vers F.

Notations et vocabulaire



- E est appelé **ensemble de départ**.
- F est appelé **ensemble d'arrivée**.

On note $f : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$

$$x \mapsto y = f(x)$$

où x désigne un élément de **E** et $y = f(x)$, l'élément de **F** que f lui fait correspondre.

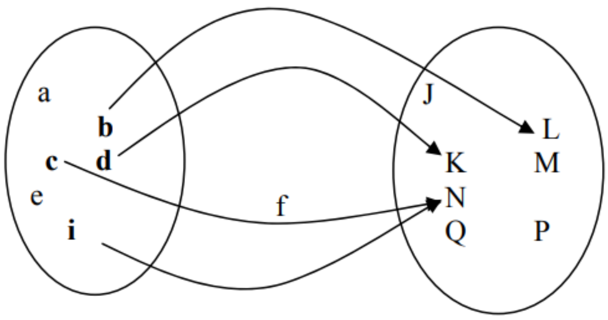
- x est appelé **variable** ou **argument** de la fonction f.
- $f(x)$ est l'**image** ou le **transformé** de x par f, x est l'**antécédent** de $y = f(x)$.

Attention : Ne pas confondre la fonction f (qui est une correspondance ou une relation) avec $f(x)$ qui est un élément de l'ensemble d'arrivée **F**.

Ensemble de définition et ensemble image

L'ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction f de **E** vers **F** est l'ensemble des éléments de **E** ayant une image dans **F**. On note souvent cet ensemble, **D*f***.

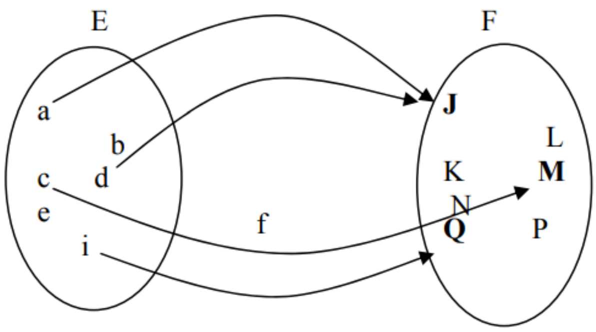


Ensemble de définition $\mathrm{D}f = \{b, c, d, i\}$

L'ensemble image

L'ensemble image de **E** par f, est le sous-ensemble de **F** formé de toutes les images des éléments de **E**. On le note $Im(f)$ ou $f(\mathbf{E})$. On peut écrire :

$$f(\mathbf{E}) = \{ y \in \mathbf{F} \,|\, x \in \mathbf{E} \text{, tel que } y = f(x)\}$$

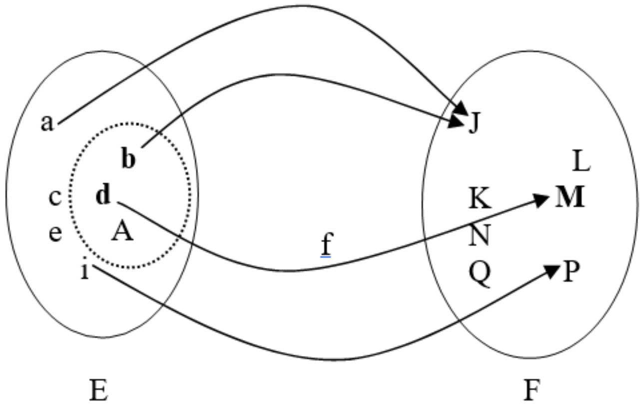


Ensemble image $f(\mathbf{E}) = \{\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathbf{Q}\}$

Plus généralement, si **A** est un sous-ensemble de **E**, l'ensemble image de **A** par f est le sous-ensemble de **F** formé de toutes les images des éléments de **A**. On le note $f(\mathbf{A})$.

On peut écrire :

$$f(\mathbf{A}) = \{\, y \in \mathbf{F} \mid x \in \mathbf{A}, \text{tel que } y = f(x)\}$$

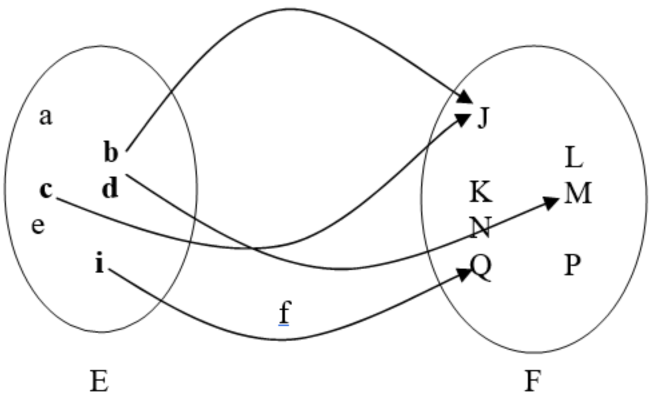


$\mathbf{A} = \{b, d\}$, l'ensemble image de **A** est $f(\mathbf{A}) = \{\mathrm{J}, \mathrm{M}\}$.

Graphe et représentation graphique d'une fonction

Le graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction f est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ pour tous les éléments x de **E** ayant une image par f.



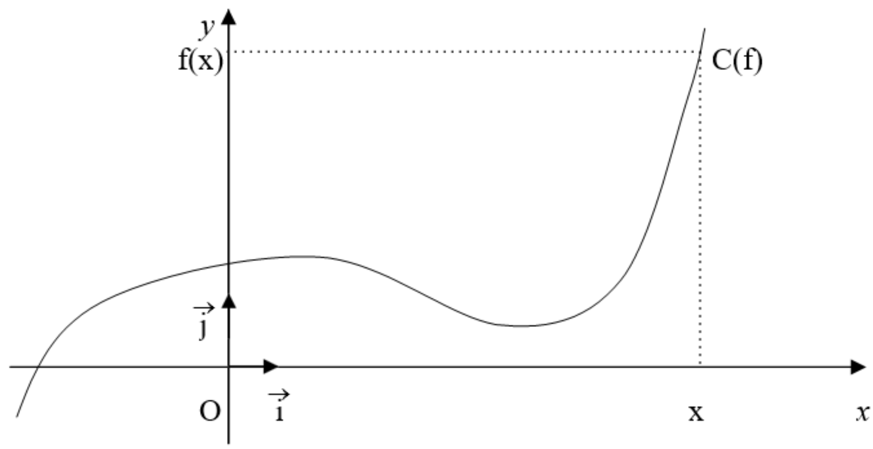
Le graphe de f est $\{(\mathrm{b}, \mathrm{J}), (\mathrm{c}, \mathrm{J}), (\mathrm{d}, \mathrm{M}), (\mathrm{i}, \mathrm{Q})\}$

Représentation graphique

Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On suppose le plan rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, La **représentation graphique** d'une fonction f de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$ pour tous les éléments x de $\mathbb{R}$ ayant une image par f. Cette représentation graphique est une courbe, on la note $C(f)$.

$\boldsymbol{y = f(x)}$ **est l'équation de la représentation graphique de $\boldsymbol{f}$**



La représentation graphique permet de visualiser le graphe. A chaque couple $(x, f(x))$ du graphe correspond le point de coordonnées $(x, f(x))$ de la représentation graphique.

Cas des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

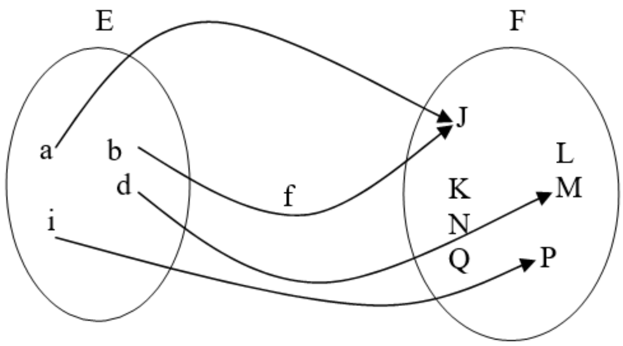
$$(x, y) \mapsto z = f(x, y)$$

On suppose l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. La représentation graphique de f est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées $(x, y, f(x, y))$ pour tous les éléments (x, y) de $\mathbb{R}^2$ ayant une image par f. Cette représentation graphique est une surface, on la note $\boldsymbol{S(f)}$.

$z = f(x, y)$ est l'équation de la surface représentant f

Application

Définition : On appelle **application** d'un ensemble **E** dans un ensemble **F**, une fonction telle que <u>tout</u> élément de **E** a une image dans **F**.



f est une application de $\{a, b, d, i\}$ dans $\{J, K, L, M, N, P, Q\}$

Remarque : f est une application de **E** dans **F** si et seulement si Df = **E**.

Injection et surjection, bijection et fonction réciproque

Injection

Définition : Une **application** f de **E** dans **F** est **injective** si, dès que deux éléments de **E** sont distincts, leurs images par f sont distinctes. On dit aussi que f est une **injection**.

Cela peut s'écrire :

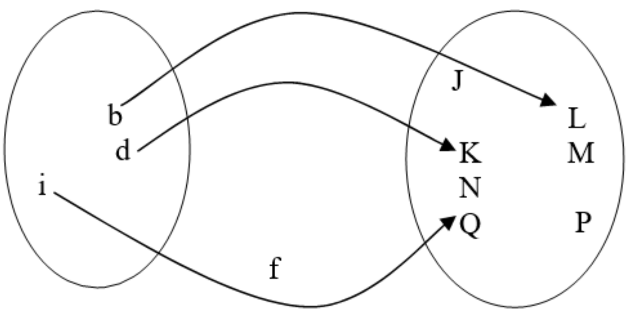
$$(x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x'))$$

Cela peut aussi s'écrire :

$$\big(f(x) = f(x')\big) \Rightarrow (x = x').$$

On utilise souvent la dernière implication pour démontrer qu'une application est injective.

On peut aussi caractériser une injection de **E** dans **F** par une application dont tout élément de **F** admet au plus un antécédent dans **E**.



f est une injection de $\{b, d, i\}$ dans $\{J, K, L, M, N, P, Q\}$

Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

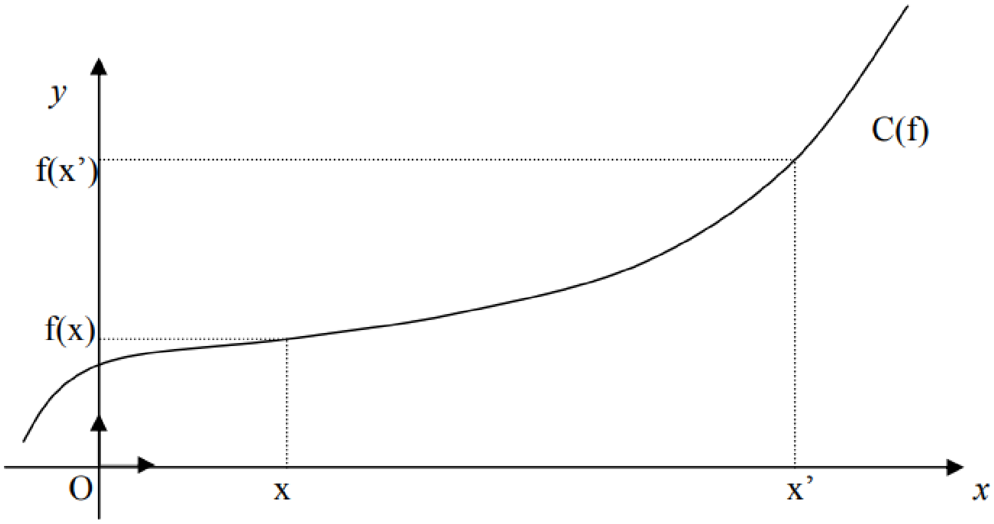
Définitions : Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement croissante sur un sous-ensemble **A** de Df si pour **tout** réels x et x' de **A** :

$$(x > x') \Rightarrow (f(x) > f(x')).$$

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement décroissante sur un sous-ensemble **A** de Df si pour **tout** réels x et x' de **A** :

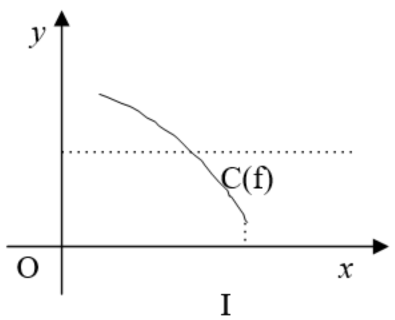
$$(x > x') \Rightarrow (f(x) < f(x')).$$

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement **monotone** sur **A** si elle y est, soit strictement croissante, soit strictement décroissante.



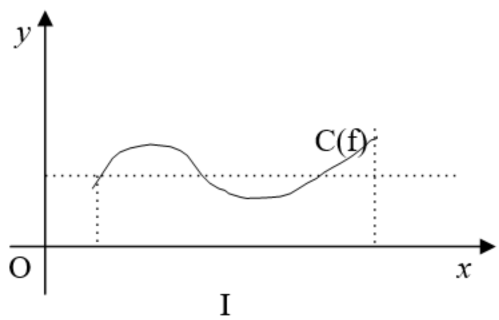
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Propriété : Si une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement monotone sur un intervalle I de Df, c'est une injection sur I.



f est injective de I dans $\mathbb{R}$

(toute parallèle à l'axe des x coupe $C(f)$ au plus une fois)



f n'est pas injective de I dans $\mathbb{R}$

Surjection

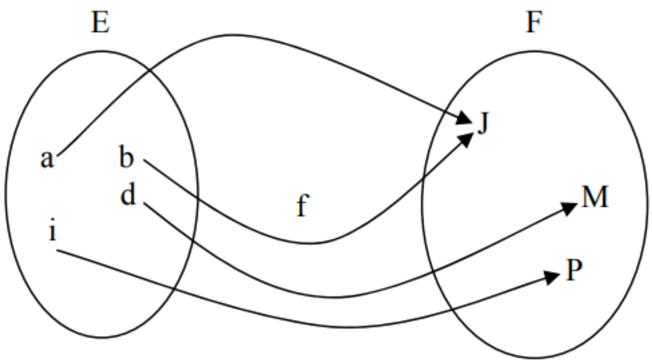
Définition : Une application f de **E** dans **F** est surjective, si tout élément y de **F** a au moins un antécédent x dans **E**. On dit aussi que f est une **surjection** de **E** sur **F**.

Cela peut s'écrire :

$$\forall y \in \mathbf{F}, \exists x \in \mathbf{E} \mid y = f(x)$$

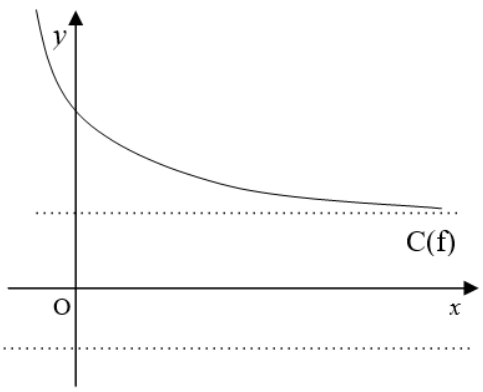
Remarque : Pour une application f : $(f \text{ est surjective}) \Leftrightarrow (Im(f) = f(\mathbf{E}) = \mathbf{F})$.

Autrement dit f est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée est atteint par f.

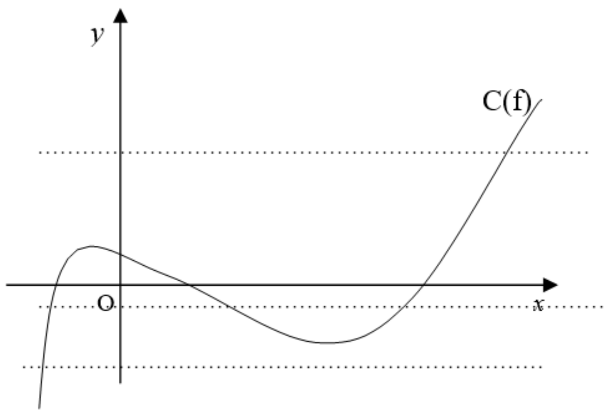


f est une surjection de $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{d}, \mathrm{i}\}$ dans $\{\mathrm{J}, \mathrm{M}, \mathrm{P}\}$.

Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$



f n'est pas une surjection sur $\mathbb{R}$.



f est une surjection sur $\mathbb{R}$ (toute parallèle à l'axe des x coupe au moins une fois $C(f)$).

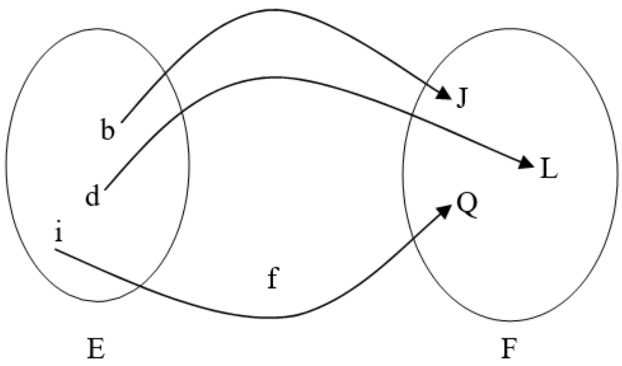
Vous aurez bien compris que : injection et surjection sont deux notions indépendantes. L'injection s'analyse sur l'ensemble de départ, alors que la surjection s'analyse sur l'ensemble d'arrivée.

Bijection

Définition : Une **application** f de **E** dans **F** est **bijective**, si tout élément y de **F** a un antécédent x unique dans **E**. On dit aussi que f est une **bijection** de **E** sur **F**.

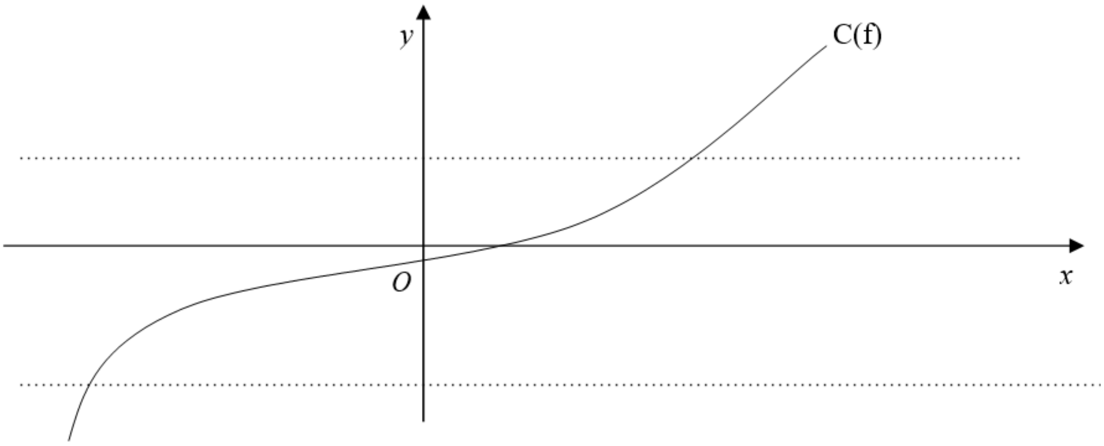
Cela peut s'écrire :

$$\forall y \in \mathbf{F}, \exists !\, x \in \mathbf{E} \mid y = f(x)$$



f est une bijection de $\mathrm{E} = \{\mathrm{b}, \mathrm{d}, \mathrm{i}\}$ dans $\mathrm{F} = \{\mathrm{J}, \mathrm{L}, \mathrm{Q}\}$

Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$



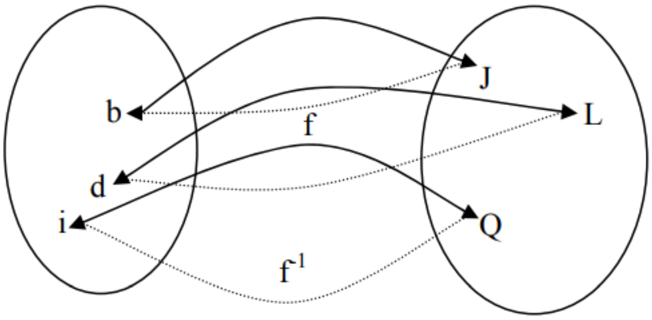
f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (toute parallèle à l'axe des x coupe $C(f)$ exactement une fois).

Fonction réciproque

Définition : Si f est une bijection de **E** dans **F**, à tout élément y de **F**, on peut faire correspondre un unique élément x de **E** tel que $y = f(x)$. On définit ainsi une nouvelle application de **F** dans **E**, appelée **fonction réciproque** de f et notée f^{-1}, une bijection qui, à tout élément y de **F**, associe $x = f^{-1}(y)$ de **E**.

On peut écrire :

$$(y = f(x)) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y))$$



f est une bijection de $\{\mathrm{b}, \mathrm{d}, \mathrm{i}\}$ dans $\{\mathrm{J}, \mathrm{L}, \mathrm{Q}\}$

f^{-1} est une bijection de $\{\mathrm{J}, \mathrm{L}, \mathrm{Q}\}$ dans $\{\mathrm{b}, \mathrm{d}, \mathrm{i}\}$

Attention : Ne pas confondre f^{-1} qui est la fonction réciproque et $1/f$ qui est l'inverse de la fonction f. Ces deux fonctions se notent parfois de la même façon.

Méthode

Soit f une fonction de **E** vers **F**.

Ainsi pour déterminer la fonction réciproque de f, on est amené à chercher les antécédents des éléments de l'ensemble d'arrivée.

Il faut donc résoudre l'équation $y = f(x)$.

On détermine d'abord les ensembles sur lesquels cette équation a exactement une solution (c'est-à-dire les ensembles sur lesquels f est une bijection).

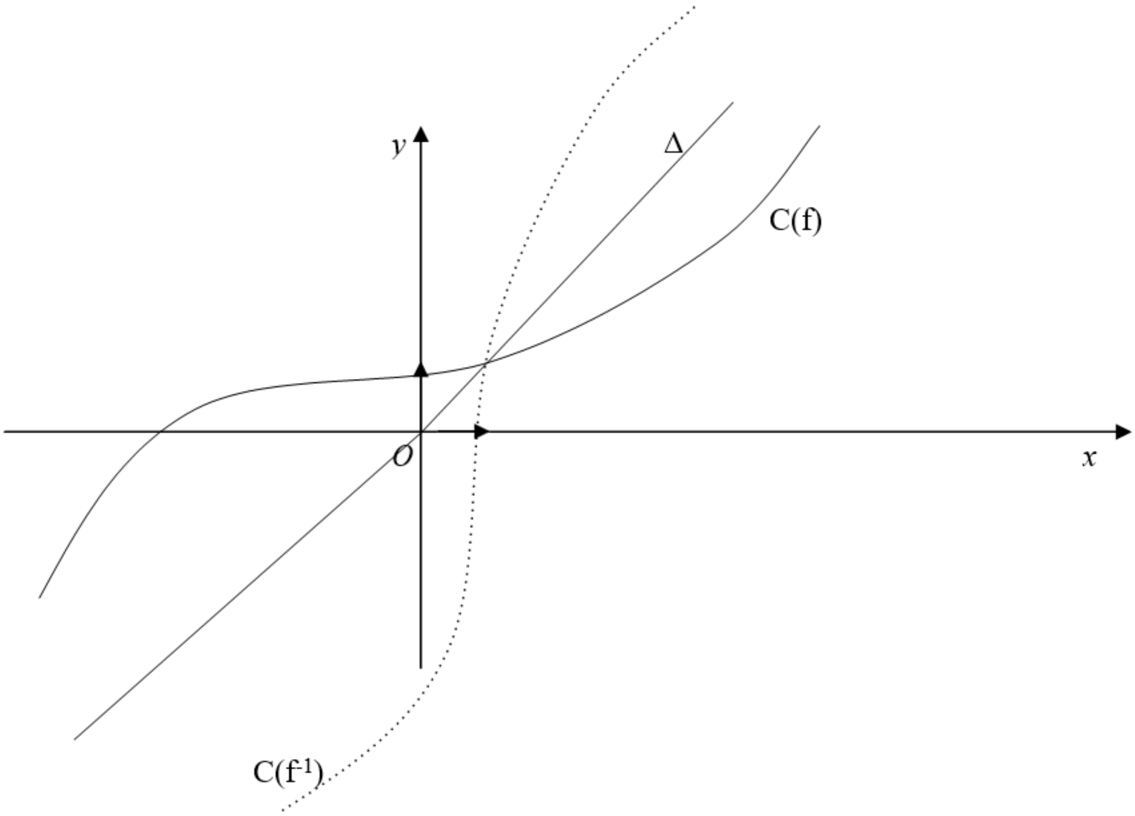
Ensuite on exprime x en fonction de y, c'est cette fonction qui est f^{-1}. On a alors $x = f^{-1}(y)$.

Cas particulier E = F

Les ensembles de départ et d'arrivée sont les mêmes (**E** = **F**), f est donc une fonction de **E** dans **E**.

x et y désignent des éléments du même ensemble, on a alors plutôt l'habitude d'appeler x la variable et y son image. Le nom de la variable important peu, on ne change pas la fonction en appelant x la variable et y sont transformé, on obtient alors $y = f^{-1}(x)$.

Propriété : En **repère orthonormé** les représentations graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite Δ d'équation $y = x$).

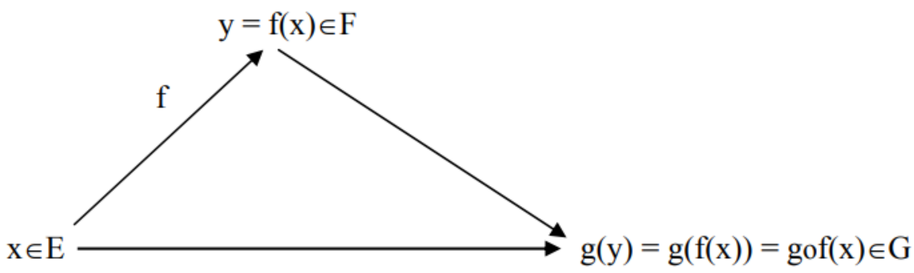


Composition des fonctions

Composition d'applications

Définition : Soit f une application de **E** dans **F**, et g une application de **F** dans **G**, on appelle **application composée** de f et g, l'application qui à tout élément x de **E** fait correspondre l'élément $g(f(x))$ de **G**.

On note $g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$ et on dit « f rond g ».



Composition de fonctions

On peut aussi définir $g \circ f$ si f et g sont des fonctions, mais il faut alors que l'ensemble image de f soit inclus dans l'ensemble de définition de g.

Si g est une application de Df dans **G**, $g \circ f$ sera alors une fonction composée, ayant même ensemble de définition que f.

Non-commutativité de la composition des fonctions

Attention la composition des fonctions n'est pas commutative ; en général

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

En effet pour pouvoir définir $g \circ f$, il faut que l'ensemble de départ **F** de g contienne $f(E)$, et pour pouvoir définir $f \circ g$, il faut que l'ensemble de départ **E** de f contienne $g(\mathbf{F})$.

Or ce n'est pas parce que l'ensemble de départ **E** de f contient $g(\mathbf{F})$, qu'automatiquement l'ensemble de départ **F** de g contient $f(\mathbf{E})$.

Par exemple si g est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et si f est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, on peut définir $f \circ g$ mais pas $g \circ f$.

Et même si on peut définir $f \circ g$ et $g \circ f$, ces deux fonctions sont en général distinctes.

Cas particulier de la fonction réciproque

On se propose de composer f et f^{-1}. C'est toujours possible et on obtient toujours le même résultat : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ (I est l'application identique qui à x fait correspondre x, sa représentation graphique est la droite Δ d'équation $y = x$)

Composée n fois (uniquement pour les fonctions de E dans E)

On note f^n la fonction $f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ (f composée n fois).

Attention : Ne pas confondre f^n = fonction $f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ (f composée n fois) et la puissance $n^{\text{ième}}$ de f: $f^n = f \times f \times \cdots \times f$ (n produits).

Références

Comment citer ce cours ?

Mathématiques 1, Odile Brandière, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).