Introduction à l'économétrie

Méthode des moindres carrés ordinaires en présence d'hétéroscédasticité ou d'autocorrélation des erreurs – Leçon 3 - Illustration

Ce cours vous est proposé par Olivier Baron, Maître de conférences, Université de Bordeaux et par AUNEGe, l'Université Numérique en Économie Gestion.

Applications aux situations d'hétéroscédasticité ou d'autocorrélation des perturbations

Hétéroscédasticité

Supposons que l'on estime un modèle linéaire multiple et que les perturbations souffrent d'une situation d'hétéroscédasticité liée à une des variables explicatives, disons la variable x_2 (effet taille). La variance de la perturbation est proportionnelle aux valeurs prises par cette variable. Par contre, on supposera qu'il n'y a pas de problème d'autocorrélation. Ainsi :

$$\mathrm{Var}\ (\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \sigma^2 x_{2,i} \qquad i = 1, \dots, n$$

La matrice de variances-covariances des perturbations a donc la forme suivante :

$$\underset{(n,n)}{\mathrm{Var}\ \varepsilon} = \underset{(n,n)}{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma^2 x_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 x_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^2 x_{2,n} \end{pmatrix} = \sigma^2 . \begin{pmatrix} x_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,n} \end{pmatrix} = \sigma^2 . \Psi$$

Dans cette situation, on caractérise simplement la matrice Ψ, sa racine carrée et son inverse :

$$\Psi = \begin{pmatrix} x_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_{2,n} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{x_{2,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{x_{2,2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{x_{2,n}} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_{2,1}}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{x_{2,2}}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{x_{2,n}}} \end{pmatrix} = P$$

$$\Psi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{2,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{2,2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_{2,n}} \end{pmatrix}$$

Autocorrélation

On suppose ici qu'il y a une autocorrélation d'ordre 1 des perturbations mais qu'elles conservent la même variance (perturbations homoscédastiques).

La relation entre deux perturbations successives est donc supposée être la suivante :

$$\varepsilon_i = \rho.\varepsilon_{i-1} + u_i \qquad \text{où } u_i \ \rightarrow LN(0\,,\mu^2)$$

Il est simple d'évaluer, dans cette situation, la variance des perturbations en supposant u_i indépendantes et non corrélées avec ε_i.

$$\text{Var}\,(\varepsilon_i) = \text{Var}\,(\rho.\varepsilon_{i-1} + u_i) = \rho^2\text{Var}\,(\varepsilon_{i-1}) + \mu^2$$

Puisqu'on a supposé les perturbations homoscédastiques, $\text{Var}\,(\varepsilon_i) = \text{Var}\,(\varepsilon_{i-1})$, et donc :

$$\text{Var}\,(\varepsilon_i) = \frac{\mu^2}{1-\rho^2} = \sigma^2$$

Calculons maintenant la covariance entre deux perturbations successives :

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_{i-1}) = E[\varepsilon_i\varepsilon_{i-1}] = \mathrm{E}[(\rho.\varepsilon_{i-1}+u_i)\varepsilon_{i-1}] = \rho.E[\varepsilon_{i-1}^2] + \underbrace{E[u_i\varepsilon_{i-1}]}_{0} = \rho\sigma^2$$

Le même type de calcul permet de calculer la covariance entre ε_i et ε_{i-2} :

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_{i-2}) = E[\varepsilon_i\varepsilon_{i-2}] = \mathrm{E}[(\rho.\varepsilon_{i-1}+u_i)\varepsilon_{i-2}] = E[(\rho.(\rho.\varepsilon_{i-2}+u_{i-1})+u_i)\varepsilon_{i-2}]$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_{i-2}) = \rho^2.E[\varepsilon_{i-2}^2] + \rho.\underbrace{E[u_{i-1}\varepsilon_{i-2}]}_{0} + \underbrace{E[u_i\varepsilon_{i-2}]}_{0} = \rho^2\sigma^2$$

On peut donc se rendre compte que la covariance entre deux perturbations distantes de j observations est seulement caractérisée par l'écart entre ces deux perturbations :

$$\mathrm{Cov}\left(\varepsilon_i,\varepsilon_{i-j}\right) = \rho^j\sigma^2$$

On en déduit l'expression de la matrice de variances-covariances des perturbations dans une situation d'autocorrélation à l'ordre 1, puis celle de la matrice Ψ :

$$\underset{(n,n)}{\mathrm{Var}\ \varepsilon} = \underset{(n,n)}{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \rho^2\sigma^2 & \cdots & \rho^{n-1}\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots & \rho^{n-2}\sigma^2 \\ \rho^2\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \ddots & \rho^{n-3}\sigma^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1}\sigma^2 & \rho^{n-2}\sigma^2 & \rho^{n-3}\sigma^2 & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathrm{Var}\ \varepsilon} = \sigma^2.\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \ddots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \sigma^2.\Psi$$

Connaissant la forme de la matrice Ψ, on peut, en utilisant la décomposition de Cholesky, caractériser sa racine carrée et son inverse.

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \ddots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \rho^2 & \rho\sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{1-\rho^2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2}\sqrt{1-\rho^2} & \rho^{n-3}\sqrt{1-\rho^2} & \cdots & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = P$$

$$\Psi^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Retour sur l'exemple d'application précédent

Comme nous l'avons vu au cours de l'exemple portant sur la fonction de demande de poulet aux Etats-Unis, les données sont entachées d'un problème d'autocorrélation des perturbations à l'ordre 1. L'utilisation des méthodes de Cochrane-Orcutt ou d'Hildreth-Lu permet d'éliminer cette anomalie et de se retrouver dans une situation satisfaisant les conditions d'application du théorème de Gauss-Markov. Il est aussi possible de renseigner le problème rencontré et d'utiliser la méthode des Moindres Carrés Généralisés sur le modèle initial. Avec le logiciel Eviews, cela consistera à rajouter le terme AR(1) à la liste des variables explicatives initiales. Les résultats sont les suivants :

Equation: EQ01_MCG Workfile: CHICKEN_AUTOCRR_FINTD4::Chick6\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: D_POULET
Method: Least Squares
Date: 10/03/23 Time: 16:02
Sample (adjusted): 1961 1999
Included observations: 39 after adjustments
Convergence achieved after 12 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	23.51656	2.478523	9.488133	0.0000
P_POULET	-0.092925	0.103985	-0.893642	0.3778
P_BOEUF	0.089972	0.045913	1.959608	0.0583
Y_DISP	0.243144	0.015859	15.33207	0.0000
AR(1)	0.801227	0.093037	8.611962	0.0000

R-squared	0.995894	Mean dependent var	51.26077
Adjusted R-squared	0.995411	S.D. dependent var	19.28900
S.E. of regression	1.306643	Akaike info criterion	3.492009
Sum squared resid	58.04875	Schwarz criterion	3.705286
Log likelihood	-63.09417	Hannan-Quinn criter.	3.568531
F-statistic	2061.780	Durbin-Watson stat	2.056647
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted AR Roots .80

Figure 1 : méthode des MG sur le modèle initial -logiciel Eviews

On retrouve les conclusions énoncées à partir des estimations par MCO du modèle en quasi-différences. Pour un risque de première espèce égal à 5%, la seule variable qui impacte significativement la demande de poulet sur la période considérée est le revenu disponible. On remarque aussi que le coefficient de cette variable fictive est largement significatif et que son estimation vaut $\hat{\beta}_4 = 0{,}801$. Cette valeur correspond à l'estimation du coefficient d'autocorrélation ρ, déjà obtenue.

Références

Comment citer ce cours ?

Introduction à l'économétrie, Olivier Baron, AUNEGe (http://aunege.fr), CC – BY NC ND (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Table des illustrations

Figures

Figure 1 : méthode des MG sur le modèle initial -logiciel Eviews 5