Exercice 1

Exprimer les phrases suivantes à l'aide de connecteur logique et des propositions p ="Nicolas a attrapé tous les pokémons de type électrique" et q ="Nicolas a attrapé tous les pokémons de type vole".

1. Nicolas a attrapé tous les pokémons de type vole et de type électrique.
2. Nicolas a attrapé tous les pokémons de type électrique donc les pokémons de type vole.
3. Nicolas n'a attrapé aucun pokémon de type vole et aucun pokémon de type éléctrique.
4. Nicolas a attrapé tous les pokémons de type vole mais pas tous les pokémons de type électrique
5. Si Nicolas a attrapé tous les pokémons de type électrique alors il a attrapé tous les pokémons de type vole.
6. Nicolas a attrapé soit les pokémons de type vole soit les pokémons de type électrique.

Correction

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow q$
3. Ce n'est pas $\neg p \wedge \neg q$ car la négation de "Nicolas a attrapé tous les pokémons de type vole" n'est pas "Nicolas n'a attrapé aucun pokémon de type vole" mais "Nicolas n'a pas attrapé tous les pokémons de type vole". Cette phrase ne s'écrit pas à l'aide des connecteurs logique et des propositions p et q.
4. $q \wedge \neg p$
5. $p \Rightarrow q$
6. $p \vee q$

Exercice 2

Quelles sont les manières de placer les parenthèses dans l'expression $\neg p \vee q \wedge \neg r$? On comparera les tables de vérité de ces propositions.

Correction

Il existe cinq manières de placer les parenthèses dans cette expression :

$$E_1 = (\neg p \vee q) \wedge \neg r$$

$$E_2 = \neg p \vee (q \wedge \neg r)$$

$$E_3 = \neg(p \vee q) \wedge \neg r$$

$$E_4 = \neg((p \vee q) \wedge \neg r)$$

$$E_5 = \neg(p \vee (q \wedge \neg r))$$

				A		E_1	B	E_2	C		E_3	D	E_4	G	E_5
p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg r$	$A \wedge \neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg p \vee B$	$p \vee q$	$\neg C$	$\neg C \wedge \neg r$	$C \wedge \neg r$	$\neg D$	$p \vee B$	$\neg G$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0

On observe en particulier que les tables de vérité de ces cinq propositions sont toutes différentes.

Exercice 3

Donner les tables de vérités des propositions suivantes.

1. $q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

2. $(p \vee q) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r)$
3. $((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow (q \vee q))$
4. $\neg((p \Rightarrow q) \wedge r)$

Correction

1. $q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

p	q	r	$p \Leftrightarrow r$	$q \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

2. $(p \vee q) \wedge ((p \wedge q) \Rightarrow r)$

p	q	r	A $p \wedge q$	B $A \Rightarrow r$	C $p \vee q$	$B \wedge C$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

3. $((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow (q \vee q))$

p	q	r	A $p \Leftrightarrow q$	B $A \Rightarrow r$	C $q \wedge q$	D $r \Rightarrow C$	$B \wedge D$
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

4. $\neg((p \Rightarrow q) \wedge r)$

			A	B	
p	q	r	$p \Rightarrow q$	$A \wedge r$	$\neg B$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Exercice 4

Simplifier les propositions suivantes.

1. $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$
2. $\neg r \wedge (\neg r \vee (p \wedge \neg r \wedge (q \vee p)))$
3. $(1 \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$
4. $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$
5. $\neg p \Rightarrow (\neg q \vee r)$
6. $q \Rightarrow (p \vee \neg r)$
7. $(p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg q)$
8. $(((p \wedge q) \Rightarrow \neg q) \wedge ((p \wedge \neg q) \Rightarrow q))$

Correction

1.

$$\begin{array}{rcll}
(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) & = & ((\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (p \wedge q) & \text{Factorisation (Distributivité)} \\
& = & ((\neg p \wedge 1) \vee (p \wedge q) & \text{Tiers exclus} \\
& = & \neg p \vee (p \wedge q) & \text{Neutralité} \\
& = & (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) & \text{Distributivité} \\
& = & 1 \wedge (\neg p \vee q) & \text{Tiers exclus} \\
& = & \neg p \vee q & \text{Neutralité} \\
& = & p \Rightarrow q & \text{Théorème}
\end{array}$$

2. D'après l'absorption 2, $\neg r \wedge (\neg r \vee (p \wedge \neg r \wedge (q \vee p))) = \neg r$.
3.

$$\begin{array}{rcll}
(1 \Rightarrow p) \Leftrightarrow p & = & (\neg 0 \vee p) \Leftrightarrow p & \text{Théorème} \\
& = & (1 \vee p) \Leftrightarrow p & \\
& = & p \Leftrightarrow p & \text{Neutralité} \\
& = & 1 &
\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{rcll}
(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q & = & (\neg(\neg p) \vee q) \Rightarrow q & \text{Théorème} \\
& = & (p \vee q) \Rightarrow q & \text{Involution} \\
& = & \neg(p \vee q) \vee q & \text{Théorème} \\
& = & (\neg p \wedge \neg q) \vee q & \text{Morgan} \\
& = & (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q) & \text{Distributivité} \\
& = & (\neg p \vee q) \wedge 1 & \text{Tiers exclus} \\
& = & \neg p \vee q & \text{Neutralité} \\
& = & p \Rightarrow q & \text{Théorème}
\end{array}$$

5.

$$\begin{aligned} \neg p \Rightarrow (\neg q \vee r) &= \neg(\neg p) \vee (\neg q \vee r) \quad \text{Théorème} \\ &= p \vee (\neg q \vee r) \quad \text{Involution} \\ &= p \vee \neg q \vee r \quad \text{Associativité} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} q \Rightarrow (p \vee \neg r) &= \neg q \vee (p \vee \neg r) \quad \text{Théorème} \\ &= \neg q \vee p \vee \neg r \quad \text{Associativité} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} (p \vee q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg q) &= \neg(p \vee q) \vee (q \Rightarrow \neg q) \quad \text{Théorème} \\ &= \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg q) \quad \text{Théorème} \\ &= \neg(p \vee q) \vee \neg q \quad \text{Idempotence} \\ &= (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q \quad \text{Morgan} \\ &= \neg q \quad \text{Absorption 2} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} (((p \wedge q) \Rightarrow \neg q) \wedge ((p \wedge \neg q) \Rightarrow q)) &= ((\neg(p \wedge q) \vee \neg q) \wedge (\neg(p \wedge \neg q) \vee q)) \quad \text{Théorème} \\ &= (((\neg p \vee \neg q) \vee \neg q) \wedge ((\neg p \vee \neg(\neg q)) \vee q)) \quad \text{Morgan} \\ &= (((\neg p \vee \neg q) \vee \neg q) \wedge ((\neg p \vee q) \vee q)) \quad \text{Involution} \\ &= ((\neg p \vee (\neg q \vee \neg q)) \wedge (\neg p \vee (q \vee q))) \quad \text{Associativité} \\ &= ((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)) \quad \text{Idempotence} \\ &= \neg p \vee (\neg q \wedge q) \quad \text{Factorisation (Distributivité)} \\ &= \neg p \vee 0 \quad \text{Contradiction} \\ &= \neg p \quad \text{Neutralité} \end{aligned}$$

Exercice 5

Les expressions suivantes sont-elles des tautologies ?

1. $\Big((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\Big) \Longleftrightarrow \Big(p \Rightarrow (q \wedge r)\Big)$
2. $\Big((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)\Big) \Longleftrightarrow \Big((p \vee q) \Rightarrow r\Big)$

Correction

1.

$$\begin{aligned} \Big(\Big((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\Big) \Longleftrightarrow \Big(p \Rightarrow (q \wedge r)\Big)\Big) &= \Big(\Big((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\neg p \vee (q \wedge r)\Big)\Big) \\ &= \Big(\Big(\neg p \vee (q \wedge r)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\neg p \vee (q \wedge r)\Big)\Big) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \Big(\Big((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)\Big) \Longleftrightarrow \Big((p \vee q) \Rightarrow r\Big)\Big) &= \Big(\Big((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\neg(p \vee q) \vee r\Big)\Big) \\ &= \Big((\neg p \wedge \neg q) \vee r\Big) \Longleftrightarrow \Big((\neg p \wedge \neg q) \vee r\Big) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 6

On note $\veebar$ le *ou exclusif*, dont la table de vérité est

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. Montrer à l'aide d'une table de vérité que $p \veebar q = (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.
2. En vous servant du résultat précédent et des règles CANDIMATICA montrer les formules suivantes.
   (a) $p \veebar p = 0$
   (b) $p \veebar 0 = p$
   (c) $p \veebar 1 = \neg p$
   (d) $p \veebar \neg p = 1$
   (e) $p \veebar q = q \veebar p$
   (f) $p \veebar (q \veebar r) = (p \veebar q) \veebar r$
   (g) $(p \veebar q = 0) \Leftrightarrow (p = q)$
   (h) $\neg(p \veebar q) = (\neg p) \veebar q = p \veebar (\neg q) = (\neg p) \veebar (\neg q)$
   (i) $(p \veebar q = r) \Rightarrow (q \veebar r = p)$

Correction

1.

p	q	$p \veebar q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0

Ce sont bien les mêmes tables de vérité.

2. (a)

$$\begin{aligned} p \veebar p &= (p \vee p) \wedge \neg(p \wedge p) \quad \text{Définition} \\ &= p \wedge \neg p \quad \text{Idempotence} \\ &= 0 \quad \text{Contradiction} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} p \veebar 0 &= (p \vee 0) \wedge \neg(p \wedge 0) \quad \text{Définition} \\ &= p \wedge \neg(p \wedge 0) \quad \text{Neutralité} \\ &= p \wedge \neg 0 \quad \text{Absorption 1} \\ &= p \wedge 1 \\ &= p \quad \text{Neutralité} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} p \veebar 1 &= (p \vee 1) \wedge \neg(p \wedge 1) \quad \text{Définition} \\ &= (p \vee 1) \wedge \neg p \quad \text{Neutralité} \\ &= 1 \wedge \neg p \quad \text{Absorption 1} \\ &= \neg p \quad \text{Neutralité} \end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
p\mathbb{W}\neg p &= (p \vee \neg p) \wedge \neg(p \wedge \neg p) && \text{Définition}\\
&= 1 \wedge \neg(p \wedge \neg p) && \text{Tiers exclus}\\
&= 1 \wedge \neg 0 && \text{Contradiction}\\
&= 1 \wedge 1\\
&= 1
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
p\mathbb{W}q &= (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) && \text{Définition}\\
&= (q \vee p) \wedge \neg(q \wedge p) && \text{Commutativité}\\
&= q\mathbb{W}p && \text{Définition}
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
p\mathbb{W}(q\mathbb{W}r) &= (p \vee (q\mathbb{W}r)) \wedge \neg(p \wedge (q\mathbb{W}r)) && \text{Définition}\\
&= (p \vee ((q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r))) \wedge \neg(p \wedge ((q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r))) && \text{Définition}\\
&= (p \vee ((q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r))) \wedge \neg(p \wedge ((q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r))) && \text{Morgan}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)) \wedge \neg(p \wedge ((q \vee r) \wedge \neg(q \wedge r))) && \text{Distributivité}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)) \wedge (\neg p \vee (\neg(q \vee r) \vee \neg(\neg(q \wedge r)))) && \text{Morgan}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)) \wedge (\neg p \vee (\neg(q \vee r) \vee (q \wedge r))) && \text{Involution}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)) \wedge (\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r))) && \text{Morgan}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)) \wedge (\neg p \vee ((\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg r \vee r)))) && \text{Distributivité}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)) \wedge (\neg p \vee (1 \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q) \wedge 1))) && \text{Tiers exclus}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)) \wedge (\neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee q)))) && \text{Neutralité}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)) \wedge ((\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q))) && \text{Distributivité}\\
&= (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee q) && \text{Associativité}\\
&= (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p \vee \neg r) && \text{Commutativité}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)) \wedge (((\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee p \vee \neg r))) && \text{Associativité}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)) \wedge (((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee \neg r) && \text{Factorisation (distributivité)}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)) \wedge ((1 \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge 1) \vee \neg r) && \text{Neutralité}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)) \wedge (((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q)) \vee \neg r) && \text{Tiers exclus}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee \neg r) && \text{Distributivité}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)) \wedge (\neg(p \vee q) \vee (p \wedge q) \vee \neg r) && \text{Tiers exclus}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)) \wedge ((\neg(p \vee q) \vee (p \wedge q)) \vee \neg r) && \text{Associativité}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)) \wedge ((\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg(p \wedge q))) \vee \neg r) && \text{Involution}\\
&= ((p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)) \wedge \neg(((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)) \wedge r) && \text{Morgan}\\
&= (((p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r) \wedge \neg(((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)) \wedge r) && \text{Distributivité}\\
&= (((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)) \vee r) \wedge \neg(((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)) \wedge r) && \text{Définition}\\
&= ((p\mathbb{W}q) \vee r) \wedge \neg((p\mathbb{W}q) \wedge r) && \text{Définition}\\
&= (p\mathbb{W}q)\mathbb{W}r && \text{Définition}
\end{aligned}
$$

(g)

$$
\begin{aligned}
p\mathbb{W}q = 0 &\iff (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) = 0\\
&\iff (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) = 0 && \text{Morgan}\\
&\iff (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q) = 0 && \text{Distributivité}\\
&\iff 0 \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee 0 = 0 && \text{Contradiction}\\
&\iff (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) = 0 && \text{Neutralité}
\end{aligned}
$$

Dans la table de vérité du *ou* la seule manière d'avoir un 0 est que les deux propositions soient fausses. Dans ce cas, cette dernière égalité est équivalente à avoir $p \wedge \neg q = 0$ et $q \wedge \neg p = 0$.
Si $p = 0$ alors $\neg p = 1$ et puisque $q \wedge \neg p = 0$ alors nécessairement $q = 0$. En particulier $p = q$.
Si $p = 1$, puisque $p \wedge \neg q = 0$, alors $\neg q = 0$ soit nécessairement $q = 1$. En particulier $p = q$.

(h)

$$
\begin{aligned}
\neg(p \veebar q) &= \neg((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)) \\
&= \neg(p \vee q) \vee \neg(\neg(p \wedge q))) \qquad \text{Morgan} \\
&= \neg(p \vee q) \vee (p \wedge q) \qquad \text{Involution} \\
&= (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \qquad \text{Morgan} \\
&= (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \qquad \text{Distributivité} \\
&= 1 \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge 1 \qquad \text{Tiers exclus} \\
&= (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \qquad \text{Neutralité} \\
&= (\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg(\neg q \vee p)) \qquad \text{Involution} \\
&= (\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg(\neg q) \wedge \neg p)) \qquad \text{Morgan} \\
&= (\neg p \vee q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)) \qquad \text{Involution} \\
&= (\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)) \qquad \text{Commutativité} \\
&= (\neg p) \veebar q \qquad \text{Définition}
\end{aligned}
$$

De plus nous avons démontré que $p \veebar q = q \veebar p$ ainsi

$$\neg(p \veebar q) = \neg(q \veebar p) = (\neg q) \veebar p = p \veebar (\neg q)$$

Pour la dernière égalité :

$$
\begin{aligned}
(\neg p) \veebar (\neg q) &= (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q) \\
&= \neg(p \wedge q) \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg(\neg q)) \\
&= \neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q) \\
&= (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)
\end{aligned}
$$

(i) Nous avons l'hypothèse $p \veebar q = r$ et nous cherchons à démontrer $q \veebar r = p$.

$$
\begin{aligned}
q \veebar r &= q \veebar (p \veebar q) \\
&= q \veebar (q \veebar p) \\
&= (q \veebar q) \veebar p \\
&= 0 \veebar p \\
&= p \veebar 0 \\
&= p \qquad \text{C.Q.F.D.}
\end{aligned}
$$