TP: Méthode de la puissance et puissance inverse pour le calcul de valeurs propres

January 5, 2017

Créer un répertoire "TPVAP-NOM" et lancer PYTHON dans ce répertoire.

Exercice 1

Considérons la matrice $A \in M_N(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans ce qui suit, on considérera les cas $N = 10$ et $N = 100$

1. Créer un fichier "puissance.py". Ecrire un script pour construire A pour toute valeur de N. Programmer la méthode de la puissance pour calculer la plus grande valeur propre de A. Tracer l'évolution de la valeur propre calculée en fonction du nombre d'itérations. Donner l'ordre et la vitesse de convergence.
2. Créer un fichier "puissance-inv.py". Programmer la méthode de la puissance *inverse* pour calculer la plus petite valeur propre de A. Tracer l'évolution de cette valeur propre calculée en fonction du nombre d'itérations. Donner l'ordre et la vitesse de convergence.
3. Créer un fichier "puissance-inv-1.py". On peut montrer que les valeurs propres de A sont comprises entre 0 et 2. Mettre en place un algorithme permettant de calculer la valeur propre de A la plus proche de 1.

Exercice 2

Dans ces exemples, on explore les limitations de la méthode de la puissance. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0.5172 & 0.5473 & -1.224 & 0.8012 \\ 0.5473 & 1.388 & 1.353 & -1.112 \\ -1.224 & 1.353 & 0.03642 & 2.893 \\ 0.8012 & -1.112 & 2.893 & 0.05827 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\mu_1 = -4$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 2$ et $\mu_4 = 1$. Les vecteurs propres correspondant à μ_1 et μ_2 sont respectivement.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0.3225 \\ -0.3225 \\ 0.6451 \\ -0.6129 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -0.1290 \\ 0.1290 \\ 0.7419 \\ -0.6451 \end{pmatrix}$$

1. Créer un fichier "puissance-lim.py"

2. Programmer la méthode de la puissance avec comme vecteur initial $x_0 = (1;0;0;0)^T$. Etudier l'évolution de la valeur propre calculée et tracer $\|x_k\|_2$ en fonction de k.

3. On part maintenant du vecteur initial $x_0 = (1;1;1;1)^T$ (presque orthogonal à w_1). Même question. Expliquer le phénomène observé.

4. On part de $x_0 = (1;1;0;0)^T$ (orthogonal à w_1 et w_2). Même question.

Exercice de synthèse

Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Dans ce qui suit, on considérera le cas $N = 20$ et $N = 200$.

1. Programmer la méthode de la puissance pour calculer la plus grande valeur propre de A. Tracer l'évolution de la valeur propre calculée en fonction du nombre d'itérations. Donner l'ordre et la vitesse de convergence.

2. Programmer la méthode de la puissance inverse pour calculer la plus petite valeur propre de A. Tracer l'évolution de cette valeur propre calculée en fonction du nombre d'itérations. Donner l'ordre et la vitesse de convergence.

3. On peut montrer que les valeurs propres de A sont comprises entre 2 et 6. Mettre en place un algorithme permettant de calculer la valeur propre de A la plus proche de 4.