

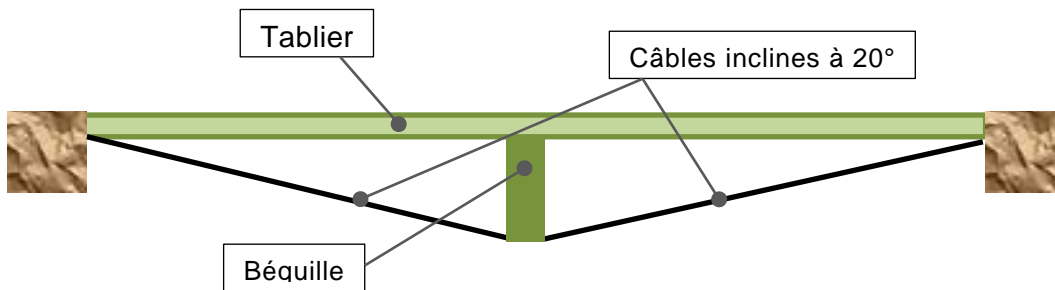
BE – Résistance des matériaux

Support d'étude : Pont sous-tendu

Les ponts à structure sous-tendue sont basés sur le principe d'un tablier porteur soutenu par des béquilles inférieures mises en compression par un ou plusieurs câbles.

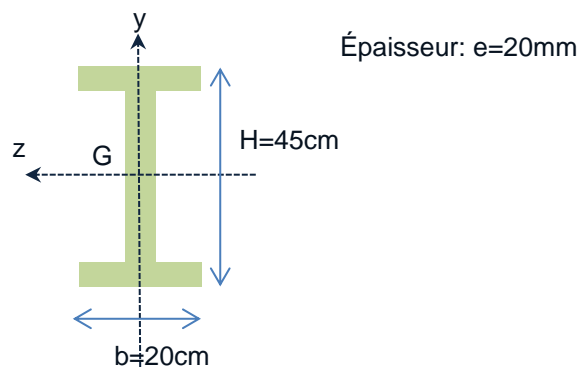
Nous allons nous intéresser à l'étude d'un pont sous-tendu à simple béquille selon le schéma suivant :

S



Caractéristiques du pont :

- poids linéique du tablier $q = 10 \text{ kN/m}$ (poids propre + charge de service)
- longueur de franchissement $AB = 2L = 30 \text{ m}$
- Matériau S235 ($R_e = 235 \text{ MPa}$)
- Le tablier est positionné sur 2 poutres support en parallèle et soudées (voir photo). Leur profil est en I avec des dimensions données ci-dessous.



Cahier des charges : la flèche maximale ne doit pas dépasser $1/200^{\text{ème}}$ de l'envergure - La structure doit résister statiquement avec un coefficient de sécurité $C_s=2$.

Problématique proposée

Pour poser le modèle, on considère

1/ que les poutres support sont juste en appui de chaque côté en A et B

2/ que les câbles sont accrochés sur les poutres en A et B

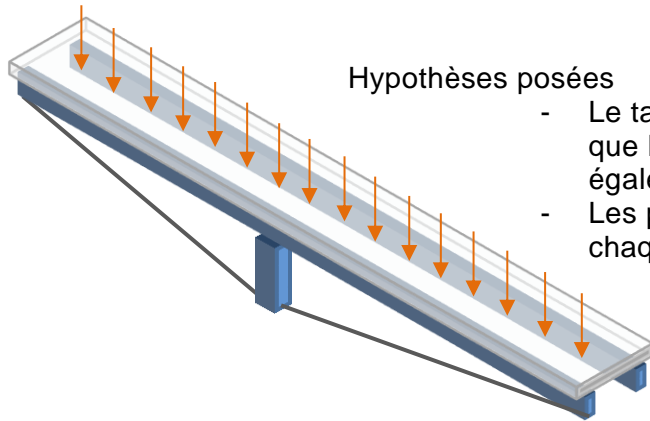
Vérifier le cahier des charges des poutres et dimensionner les câbles (sachant qu'il y a deux câbles par poutre).

On pourra :

- *Montrer que l'absence de béquille ne permet pas de respecter le cdch*
- *Discuter de l'influence de la rigidité de l'appui sur la béquille sur le dimensionnement des poutres (critère résistance et critère rigidité)*

INTRODUCTION

L'étude concerne un prédimensionnement en résistance des poutres d'un pont sous tendu.

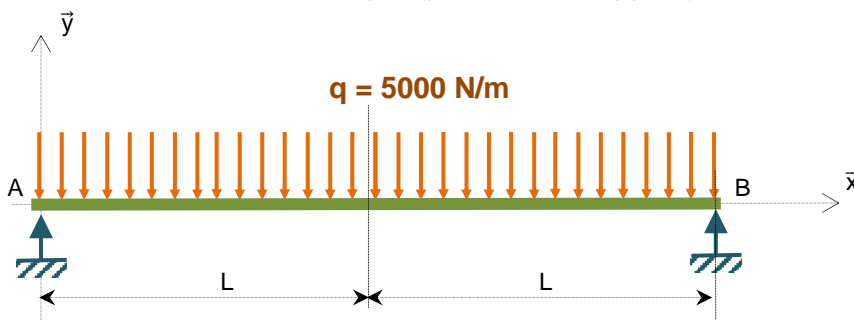


Hypothèses posées

- Le tablier est horizontal donc on suppose que la charge répartie se répartit également sur chaque poutre
- Les poutres sont simplement appuyées de chaque côté

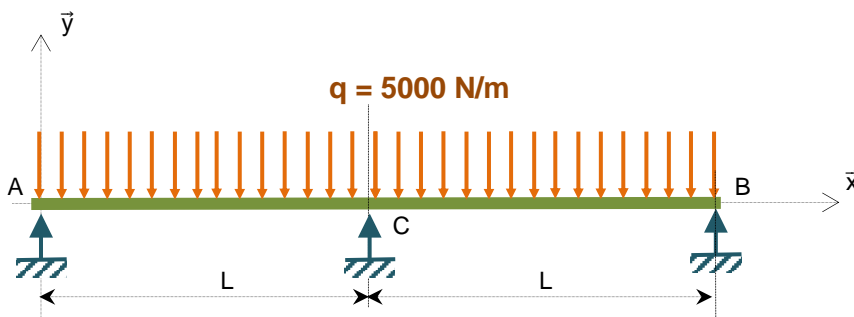
Les câbles reprennent l'effort sur la béquille centrale. La réalité se situe entre un premier modèle sans béquille et un deuxième modèle avec une béquille infiniment rigide. En effet les câbles soumis à des efforts de traction s'allongent ce qui provoque un affaissement de la béquille. On déduit les différents modèles d'étude

Modèle 1 : câble infiniment souple (poutre sur 2 appuis)



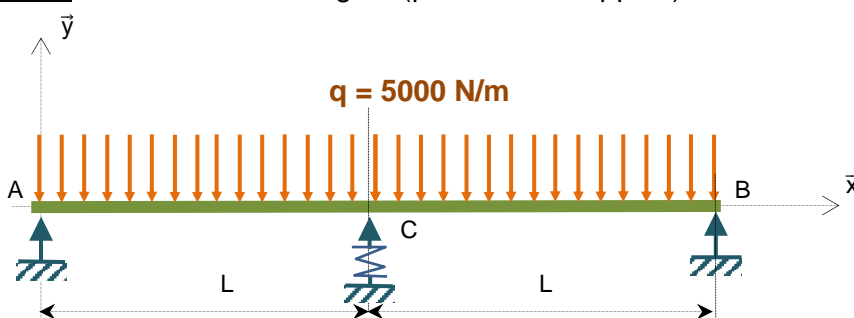
Nous sommes dans le cas d'une poutre isostatique dont la résolution a été vue en TD

Modèle 2 : câble infiniment rigide (poutre sur 3 appuis)



Nous sommes dans le cas d'une poutre hyperstatique sur 3 appuis simples dont la résolution a été vue en TD

Modèle 3 : câble infiniment rigide (poutre sur 3 appuis)



Nous sommes dans le cas d'une poutre hyperstatique sur 3 appuis simples avec l'appui central modélisable par un appui élastique avec une certaine raideur. Une difficulté consiste à déterminer cette raideur.

Plan d'action de l'étude

Etape 1 : Réponse à la première problématique en s'appuyant sur le modèle 1 : on montre que le pont ne respecte pas le cdch

Etape 2 : Recherche de l'effort maximal dans les câbles pour leur dimensionnement en s'appuyant sur le modèle 2 : on détermine ainsi la force appliquée sur la béquille puis les forces dans les câbles ce qui permet de les dimensionner.

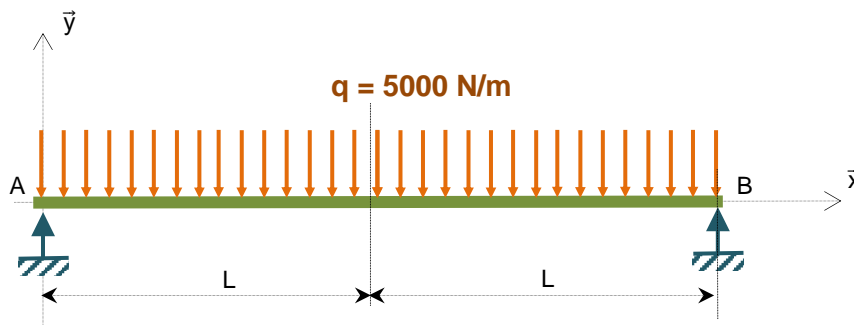
Etape 3 : Détermination avec la dimension des câbles de leur allongement en fonction des efforts et donc de la raideur équivalente de la béquille

Etape 4 : Détermination des réactions aux appuis A, B et C

Etape 5 : Tracé de l'évolution des efforts intérieurs pour trouver la section la plus sollicitée et vérifier le cdch par la détermination des contraintes maximales.

Remarque : il est possible de remarquer que les efforts intérieurs dans le cas réel sont compris entre ceux du modèle 1 et ceux du modèle 2

ETAPE 1 : modèle 1 – Vérifier que le cahier des charges n'est pas respecté sans béquille



Actions de liaison :

On peut trouver aisément les actions aux appuis étant donné le problème symétrique

$$Y_A = Y_B = q \cdot L$$

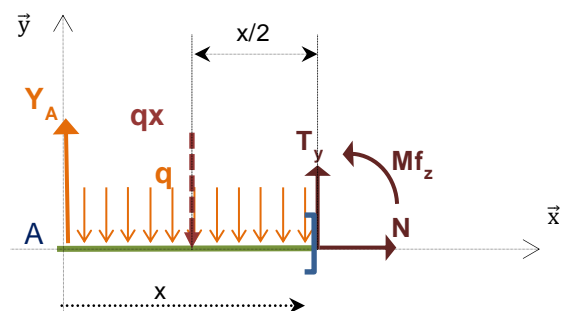
Efforts intérieurs :

En isolant la partie amont :

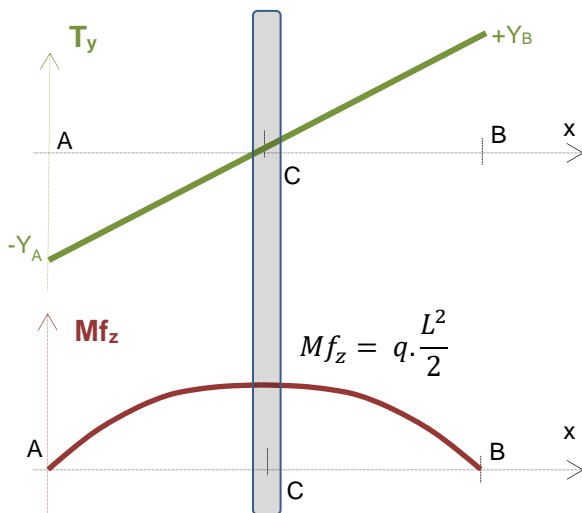
Calculons le moment M_f_z entre A et B

L'application du PFS donne :

$$M_{f_z} + \frac{q \cdot x^2}{2} - Y_A \cdot x = 0$$



Ici, avec un peu de sens physique, on ressent bien que la poutre résiste moins au milieu du segment (AB) C'est effectivement ce que l'on observe sur les diagrammes.



La zone dangereuse se situe donc dans la section au point C.

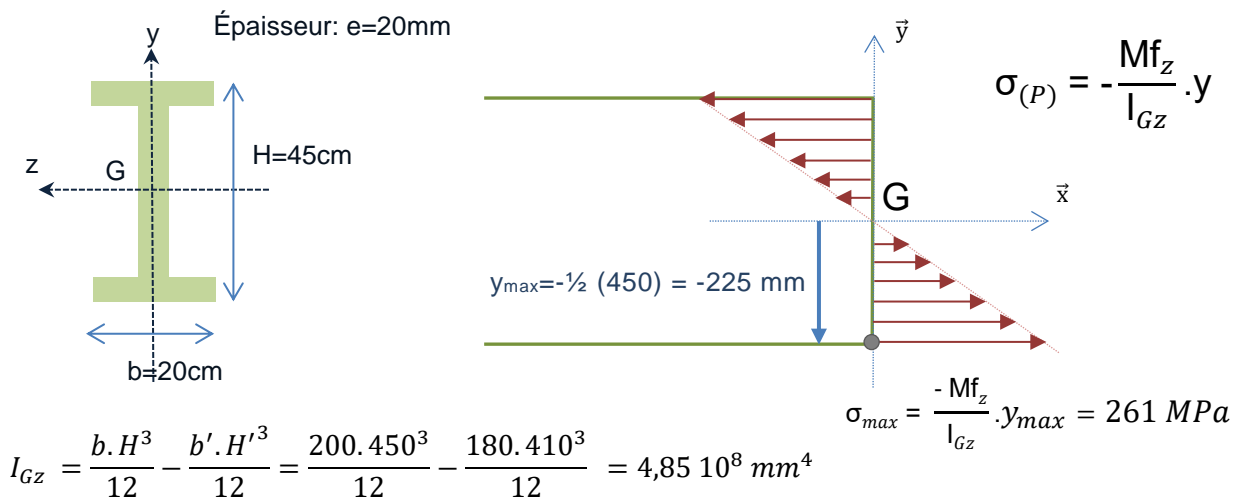
Dans cette section, la sollicitation est de la flexion avec

$$T_y = 0$$

$$M_{f_z} = q \cdot \frac{L^2}{2} = 5,625 \cdot 10^5 \text{ N.m}$$

Contraintes et déplacements :

La répartition de contraintes dans la section droite au point C est la suivante



La limite élastique du matériau est de 235 Mpa avec un coefficient de sécurité de 2, soit :

$$\sigma_{max} \leq 117,5 \text{ MPa}$$

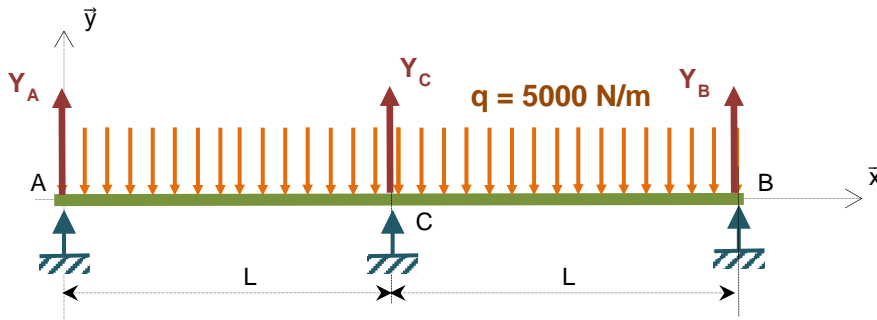
Le critère de résistance n'est donc pas vérifié.

Le déplacement du point C est :

$$v_{maxi} = \frac{-5 \cdot q \cdot (2L)^4}{384 \cdot E \cdot I_{Gz}} = -0,52 \text{ m}$$

Le critère de rigidité impose une flèche maximale inférieure à 1/200^{ème} de la longueur de la poutre soit 0,15 m.

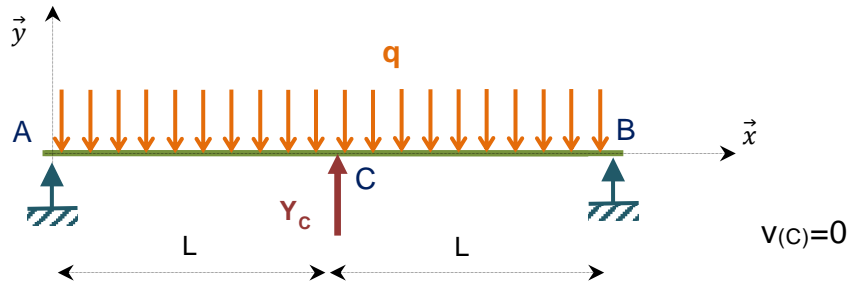
Le critère de rigidité n'est pas vérifié

ETAPE 2 : modèle 2 – Effort dans le cas d'un appui infiniment rigideModèle proposé

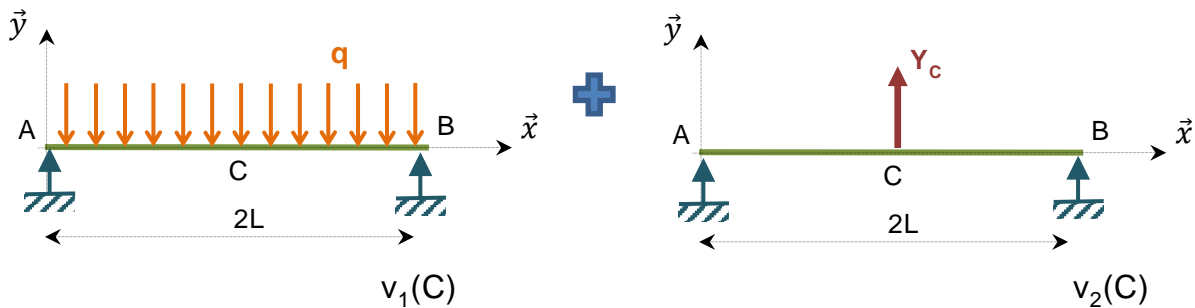
Degré d'hyperstaticité

$$h = 3 \text{ inconnues} - 2 \text{ équations utiles} = 1$$

Système isostatique associé et condition de déplacement



Utilisation du principe de superposition



Ecriture de la condition de déplacement

$$v_{(C)} = 0$$

$$v_{1(C)} = \frac{5 \cdot q \cdot (2L)^4}{384 \cdot E \cdot I_{Gz}}$$

$$v_{2(C)} = \frac{-Y_B \cdot (2L)^3}{48 \cdot E \cdot I_{Gz}}$$

$$v_{1(C)} + v_{2(C)} = 0$$

On déduit

$$Y_C = \frac{5}{4} \cdot q \cdot L = 93,75 \text{ kN}$$

Actions de liaison

Le PFS donne directement étant donnée la symétrie :

$$Y_B = \frac{5}{4} \cdot q \cdot L \quad ; \quad Y_A = Y_C = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$$

Efforts intérieurs

Etant donnée la symétrie, on recherche les efforts intérieurs uniquement sur (AB)

En s'appuyant sur le cas simple d'une poutre sur deux appuis avec une charge répartie q , il vient :

$$T_y = -Y_A + q \cdot x$$

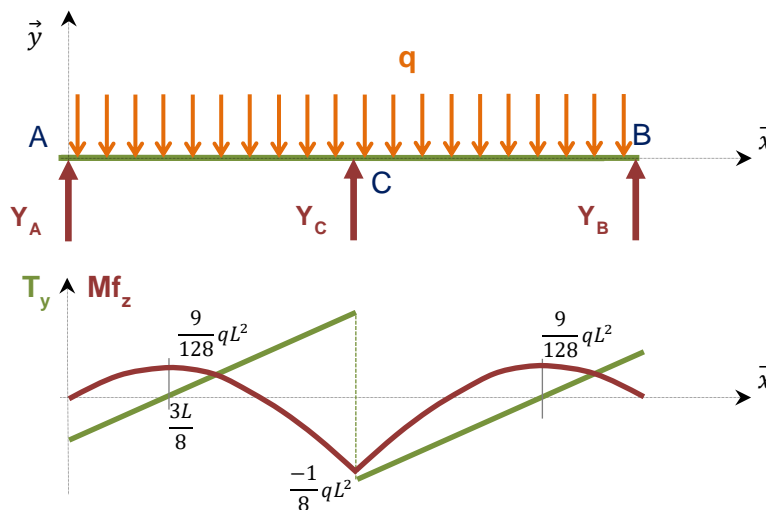
$$Mf_z = Y_A \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

En posant $T_y = 0$, on détermine la distance pour laquelle le moment passe par un maximum : $x_m = \frac{3}{8}L$

On déduit alors les valeurs des moments dans cette section et dans la section en B :

$$Mf_{z(m)} = \frac{3}{8}qL \cdot \frac{3}{8}L - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{3}{8}L\right)^2 = \frac{9}{128}qL^2$$

$$Mf_{z(C)} = \frac{3}{8}qL \cdot L - \frac{q}{2} \cdot L^2 = -\frac{1}{8}qL^2$$



La section la plus critique est donc la section C avec

$$Mf_{z \max} = -q \cdot \frac{L^2}{8} = -1,4 \cdot 10^5 \text{ N.m}$$

Remarque sur les contraintes

En reprenant les valeurs de I_{Gz} et de y_{\max} , la contrainte maximale dans la section la plus sollicitée (en C) est maintenant :

$$\sigma_{\max} = \frac{-Mf_z}{I_{Gz}} \cdot y_{\max} = 65,25 \text{ MPa}$$

On observe que la contrainte maximale est inférieure à la contrainte admissible

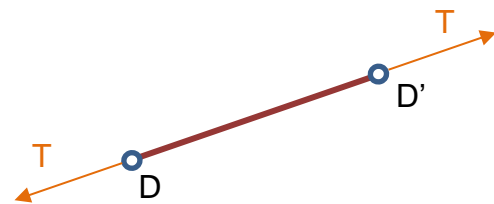
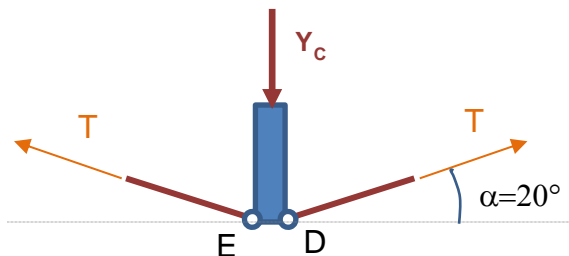
ETAPE 3 : Dimensionnement des câbles

L'effort en C correspond à une force maximale car les câbles lorsqu'ils se détendent conduisent à un affaissement de l'appui et donc à une force moins importante

L'isolement de la béquille permet alors de connaître la tension maximale subie par les câbles.

On suppose que les câbles sont de masse négligeable

Chaque câble travaille donc en traction



L'équilibre de la béquille suivant l'axe vertical donne :

$$T = \frac{Y_c}{2 \cdot \sin(\alpha)}$$

On déduit : $T_{max} = 137053 \text{ N}$



Sur un site de référence, on choisit un câble inox avec une charge à la rupture $R_m = 1600 \text{ Mpa}$ et un module d'élasticité $E = 170000 \text{ Mpa}$. Le coefficient de sécurité adopté pour les câbles fixes est $C_s = 4$.

L'effort normal est donc $N = T_{max}$

Les contraintes sont uniformes dans la section droite

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{T_{max}}{\pi \cdot r^2}$$

$$\sigma_{max} \leq \frac{R_m}{C_s}$$

D'où :

$$\frac{T}{\pi \cdot r^2} \leq \frac{R_m}{C_s}$$

On déduit le rayon minimal des câbles :

$$r \geq \sqrt{\frac{T_{max} \cdot C_s}{\pi \cdot R_m}} = \sqrt{\frac{137050 \cdot 4}{\pi \cdot 1600}} = 10,4 \text{ mm}$$

Nous avons plutôt intérêt à ce que la béquille ne s'affaisse pas trop. Il est donc préférable de tendre vers un diamètre plus important

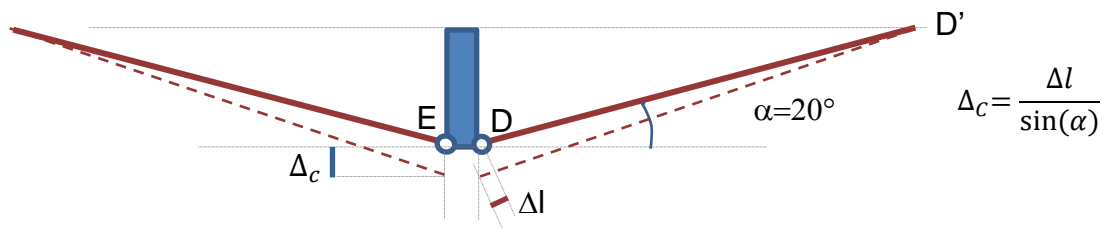
On choisit alors un câble de diamètre $D = 24 \text{ mm}$

Remarque sur l'allongement du câble pour la tension maximale

On détermine aisément :

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot S} = \frac{137050 \cdot 1600}{170000 \cdot \pi \cdot 12^2} = 28,4 \text{ mm}$$

La figure permet de relier l'allongement du câble Δl à l'affaissement de la béquille Δ_c



On obtient un affaissement maximal : $\Delta_{c \max} = 83 \text{ mm}$

2 stratégies sont alors possibles :

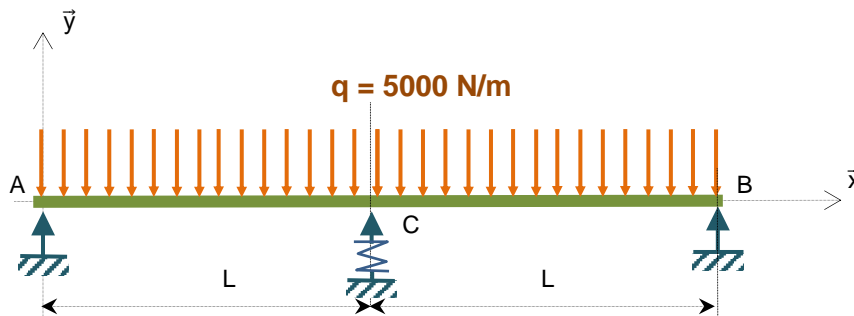
1/ Se placer dans le cas le plus défavorable avec l'affaissement maximal et déduire le nouvel effort en C ainsi que les diagrammes des efforts intérieurs et la répartition des contraintes dans la section droite la plus sollicitée.

Le cas réel se situe alors entre le cas l'appui infiniment rigide vu précédemment et le cas de l'affaissement maximal traité ici.

2/ Déterminer la raideur liée à l'allongement des câbles puis modéliser l'appui comme un appui élastique.

C'est ce que nous faisons dans l'étape 4.

ETAPE 4 et 5 : Modèle 3. Etude avec appui élastique tenant compte des câbles



Les relations entre Y_c et T puis entre les allongements donnent :

$$\Delta_c = \frac{\Delta l}{\sin(\alpha)} = \frac{T \cdot l}{E \cdot S \cdot \sin(\alpha)} = \frac{Y_c \cdot l}{2 \cdot E \cdot S \cdot \sin^2(\alpha)}$$

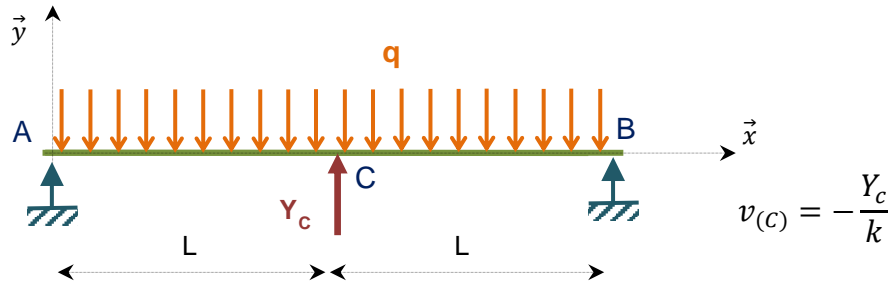
On déduit alors la raideur équivalente :

$$k_{eq} = \frac{2 \cdot E \cdot S \cdot \sin^2(\alpha)}{l}$$

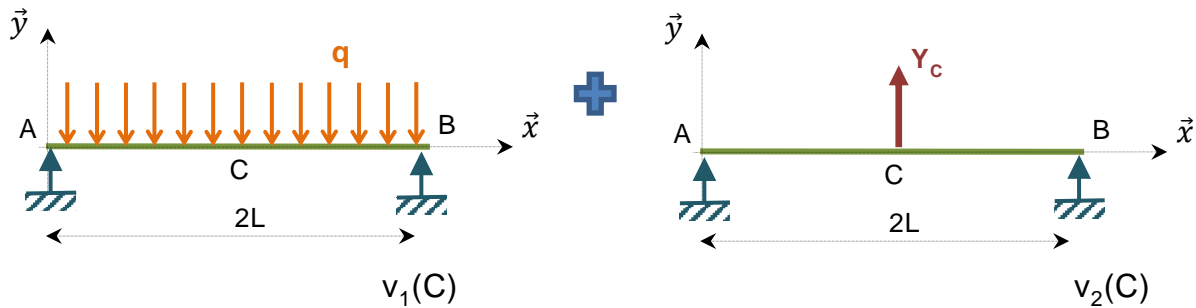
L'application numérique donne :

$$k_{eq} = 1,12 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

Il suffit alors de reprendre l'étude 2 hyperstatique avec un appui élastique
Système isostatique associé et condition de déplacement



Utilisation du principe de superposition



Ecriture de la condition de déplacement

$$v_{(C)} = -\frac{Y_c}{k}$$

$$v_{1(C)} = \frac{5 \cdot q \cdot (2L)^4}{384 \cdot E \cdot I_{Gz}}$$

$$v_{2(C)} = \frac{-Y_B \cdot (2L)^3}{48 \cdot E \cdot I_{Gz}}$$

$$v_{1(C)} + v_{2(C)} = -\frac{Y_c}{k}$$

On déduit

$$Y_c = 80,7 \text{ kN}$$

$$Y_A = Y_B = 34,65 \text{ kN}$$

La démarche pour déterminer les efforts intérieurs et la contrainte maximale dans la section droite est identique à l'étude 2.

On obtient :

$$T_y = -Y_A + q \cdot x$$

$$M_{fz} = Y_A \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

Avec un moment fléchissant maximum à $x=L$ ou pour $T_y = 0$ soit $x_D = \frac{Y_A}{q}$

On obtient un moment fléchissant maximal:

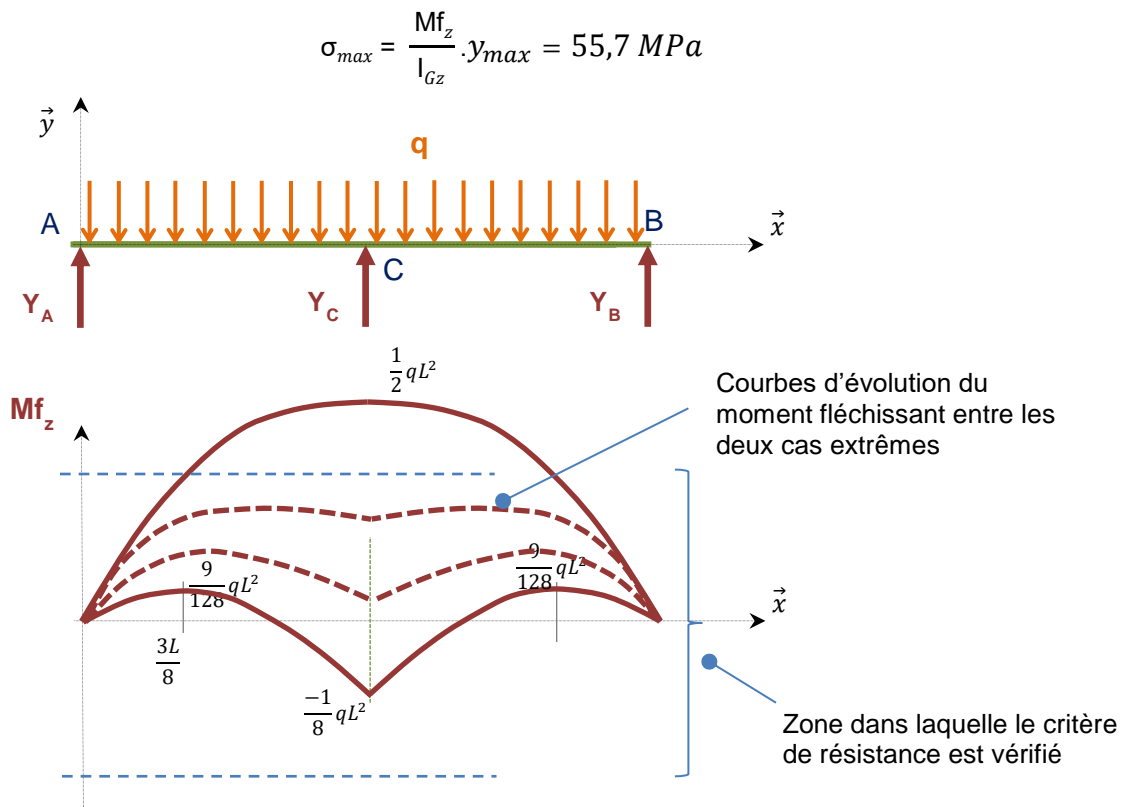
$$M_{fz \max} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ N.m}$$

Situé à une distance $x=7\text{m}$ de A

Remarque : le cas d'un appui qui s'affaisse se situe entre l'étude du modèle1 et l'étude du modèle2 avec un moment fléchissant qui varie entre les deux cas extrêmes (infiniment souple et infiniment rigide)

Sur la figure ci-dessous, on observe les réseaux de courbes correspondants à différentes raideurs. On peut très bien en poussant l'étude un peu plus loin définir une contrainte à ne pas dépasser, soit 117,5 Mpa et en déduire un moment fléchissant à ne pas dépasser en valeur absolue, ce qui permet de définir sur la figure une zone dans laquelle on doit se situer pour vérifier le critère de résistance.

Dans notre cas, la contrainte maximale dans la section la plus sollicitée est alors :



On observe que la contrainte maximale est inférieure à la contrainte admissible.

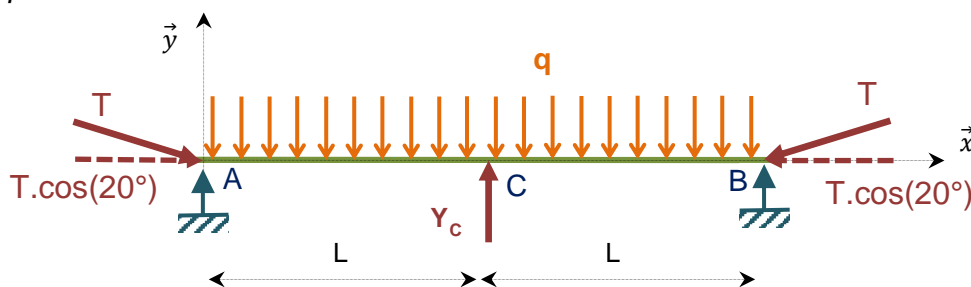
Le déplacement maximal est obtenu en C au niveau de la béquille. Il se calcule aisément avec la raideur k :

$$\Delta_C = \frac{Y_C}{k_{eq}} = \frac{80700}{1120000} = 0,072 \text{ m}$$

On observe que la flèche maximale est inférieure à la limite admissible égale à 0,15 m.

Remarque 1 : Le concepteur à ce stade peut envisager d'augmenter cette raideur k_{eq} pour optimiser le dimensionnement (rechercher la valeur de raideur qui minimise les contraintes et l'affaissement)

Remarque 2 : Si les câbles sont accrochés en A et B aux poutres, les poutres travaillent en plus en compression



L'effort de compression est

$$P = T \cdot \cos(20^\circ) = \frac{Y_C}{2 \cdot \sin(20^\circ)} \cdot \cos(20^\circ) = 324,15 \text{ kN}$$

La contrainte de compression qui vient s'ajouter est alors :

$$\sigma_c = \frac{P}{S} = \frac{-324 \cdot 10^3}{(450 + 2 \cdot 200) \cdot 20} = -19 \text{ MPa}$$

Cette contrainte n'est pas négligeable et doit s'ajouter à la contrainte maximale calculée, ce qui nous donne une contrainte maximale en valeur absolue égale à 75 MPa.