RDM – Systèmes hyperstatiques

Objectif : appliquer le principe de superposition pour dimensionner une structure hyperstatique

Escalier suspendu

PRESENTATION

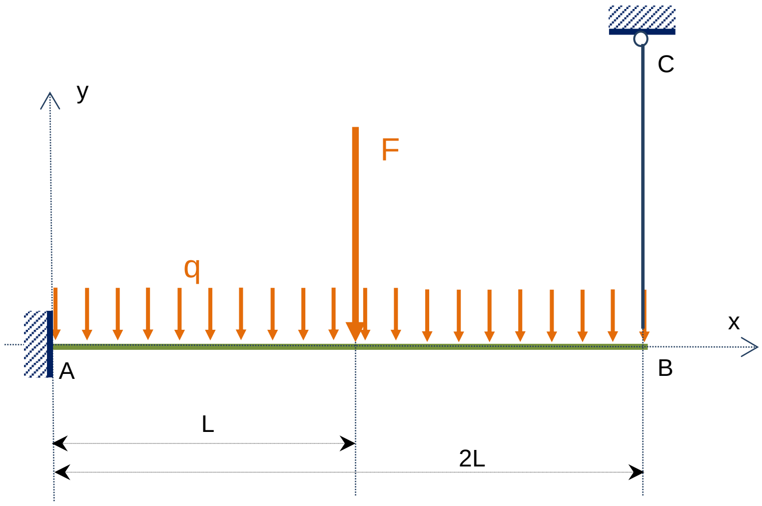
L’étude concerne une marche d’escalier suspendu

Une marche d’escalier (AB) est encastré en A et rigidifié en B par un câble suspendu.
Les marches sont considérées comme des poutres de largeur 200mm et d’épaisseur 30mm
La longueur des marches est 2L=800mm

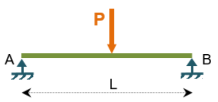
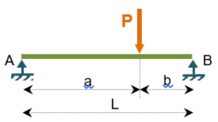
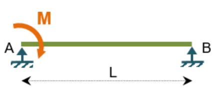
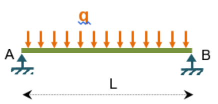
Chaque marche supporte une charge linéique verticale **q=1000 N/m** et une force au centre **F=1500 N**.

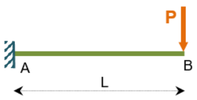
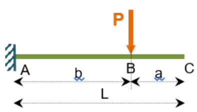
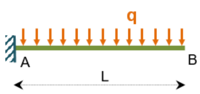
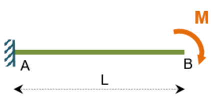
QUESTION

Déterminer en fonction de F, q, L, E et I_G les actions de liaisons en A et B.
Donner une démarche permettant de dimensionner le câble ainsi que de vérifier la résistance de la marche.



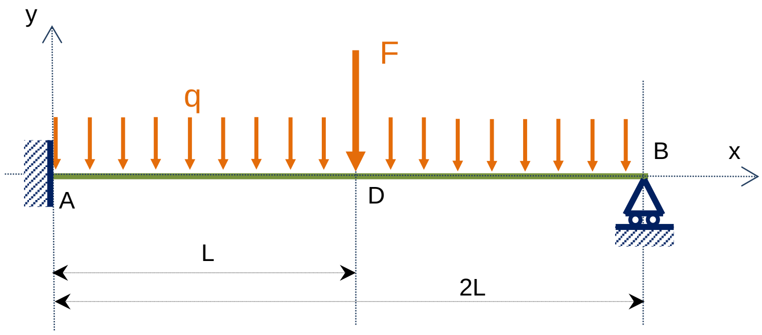
FORMULAIRE – Cas de charges en flexion

Cas de charges	Flèches	Rotations
	$\frac{PL^3}{48EI}$	$\theta_A = -\frac{PL^2}{16EI}$ $\theta_B = +\frac{PL^2}{16EI}$
	$f_{l/2} = \frac{-Pb}{48EI}(3L^2 - 4b^2)$ $f_a = \frac{-Pa^2b^2}{3EIL}$ $f_{max} = \frac{-Pb}{27EIL}\sqrt{3(L^2-b^2)^3}$	$\theta_A = \frac{Pb}{6EIL}(b^2 - L^2)$ $\theta_B = \frac{Pa}{6EIL}(L^2 - a^2)$
	$f_{L/2} = -\frac{ML^2}{16EI}$ $f_{maxi} = -\frac{ML^2}{15.58EI}$	$\theta_A = -\frac{ML}{3EI}$ $\theta_B = +\frac{ML}{6EI}$
	$\frac{5qL^4}{384EI}$	$\theta_A = -\frac{qL^3}{24EI}$ $\theta_B = +\frac{qL^3}{24EI}$

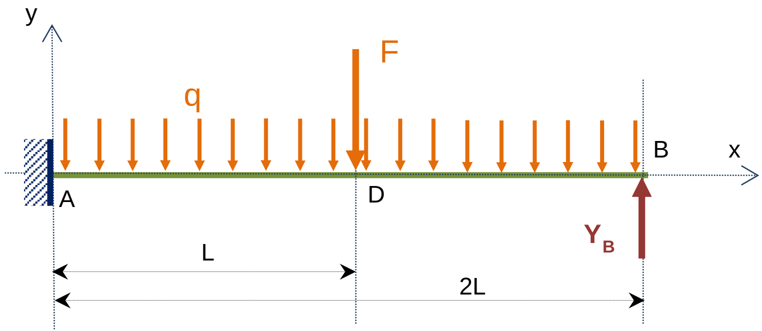
Cas de charges	Flèches	Rotations
	$f_B = -\frac{PL^3}{3EI}$	$\theta_B = +\frac{PL^2}{2EI}$
	$f_B = -\frac{Pb^3}{3EI}$ $f_C = -\frac{Pb^2}{6EI}(2L + a)$	$\theta_B = \theta_C = +\frac{Pb^2}{2EI}$
	$f_B = -\frac{qL^4}{8EI}$	$\theta_B = +\frac{qL^3}{6EI}$
	$f_B = -\frac{ML^2}{2EI}$	$\theta_B = \frac{ML}{EI}$

Hypothèse d'un câble infiniment rigide

Dans ce cas, le modèle retenu est un appui au niveau du point B

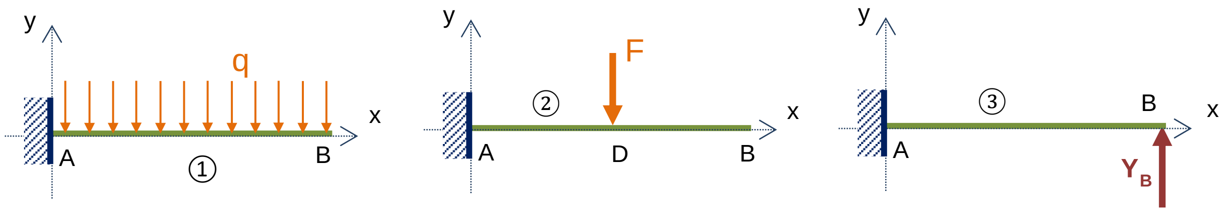


De façon classique, on peut prendre la poutre encastrée en A comme système isostatique associé avec la condition en déplacement au point B



$v_{(B)}=0$

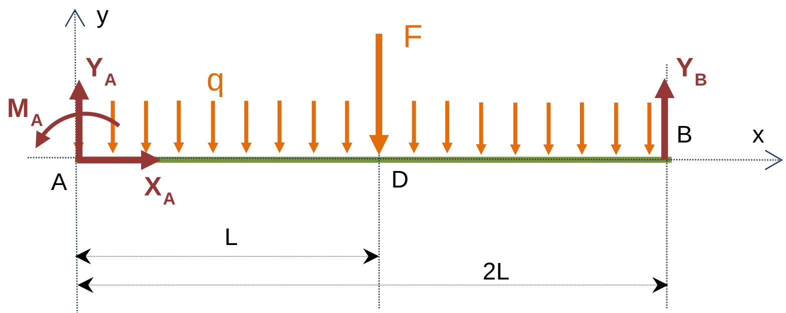
En s'appuyant sur les résultats du tableau, on peut superposer 3 cas



$$v_{1\,(B)} = \frac{-q.(2L)^4}{8.E.I_{Gz}}$$
$$v_{2\,(B)} = \frac{-F.L^2.(5L)}{6.E.I_{Gz}}$$
$$v_{3\,(B)} = \frac{+Y_B.(2L)^3}{3.E.I_{Gz}}$$

La condition $v_{(B)} = 0$ nous permet d'obtenir Y_B

Le PFS nous permet alors de déterminer les autres inconnues de liaison X_A Y_A et M_A



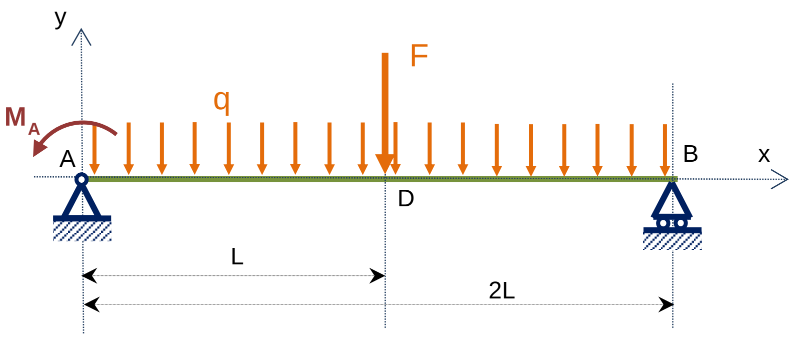
Les équations obtenues sont :

$X_A = 0$

$Y_A + Y_B - F - q.2L = 0$

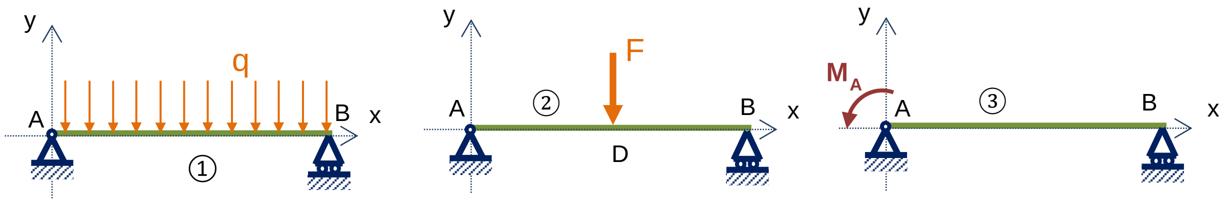
$M_A + Y_B.2L - F.L - q.2L^2 = 0$

<u>Remarque</u> : On peut également s'appuyer sur un système isostatique différent :



$\theta_{(A)}=0$

En s'appuyant sur les résultats du tableau, on peut superposer 3 cas



$$\theta_{1\,(A)} = \frac{-q.(2L)^3}{24.E.I_{Gz}}$$
$$\theta_{2\,(A)} = \frac{-F.(2L)^2}{16.E.I_{Gz}}$$
$$\theta_{3\,(A)} = \frac{+M_A.(2L)}{3.E.I_{Gz}}$$

La condition $\theta_{(B)} = 0$ nous permet d'obtenir M_A

Les équations de la statique traduisant l'équilibre permet alors de déterminer les autres composantes d'actions de liaison X_A Y_A et Y_B

$X_A = 0$

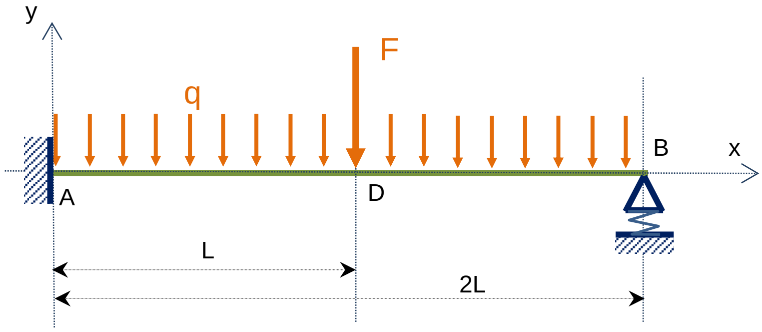
$Y_A + Y_B - F - q.2L = 0$

$M_A + Y_B.2L - F.L - q.2L^2 = 0$

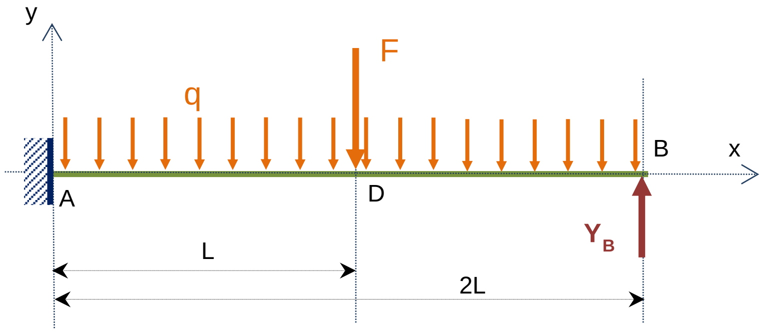
On obtient bien sûr les mêmes résultats que précédemment.

Prise en compte de l'allongement du câble

Dans ce cas, l'appui au niveau du point B n'est plus rigide mais a une certaine élasticité (le câble qui travaille en traction se comporte comme un ressort)

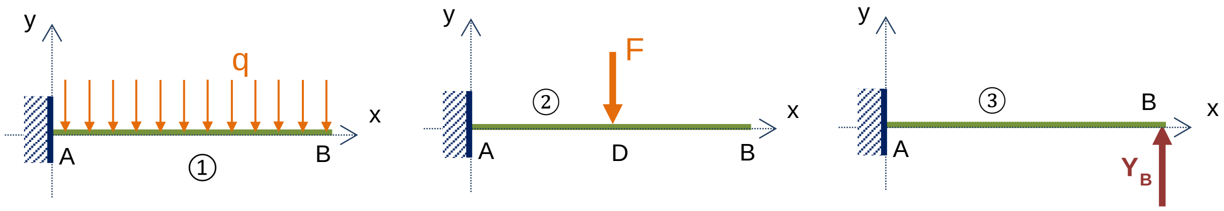


De façon classique, on peut prendre la poutre encastrée en A comme système isostatique associé avec la condition en déplacement au point B correspondant à l'allongement du câble



$v_{(B)} = -\Delta_B$

On superpose comme précédemment les 3 cas



$$v_{1\ (B)} = \frac{-q.(2L)^4}{8.E.I_{Gz}}$$

$$v_{2\ (B)} = \frac{-F.L^2.(5L)}{6.E.I_{Gz}}$$

$$v_{3\ (B)} = \frac{+Y_B.(2L)^3}{3.E.I_{Gz}}$$

La condition $v_{(B)} = v_{1\ (B)} + v_{2\ (B)} + v_{3\ (B)} = -\Delta_B$ nous permet d'obtenir Y_B

L'allongement du câble est :

$$\Delta_B = \frac{Y_B.L_c}{E_c.S_c}$$

Avec E_c module d'élasticité du câble, L_c, longeur du câble et S_c section du câble

<u>Remarque</u> : La valeur de Y_B dépend de la longueur du câble et donc de la marche considérée. La première marche sur la photo est celle dont la longueur du câble est la plus importante et donc dont l'appui est le moins raide.