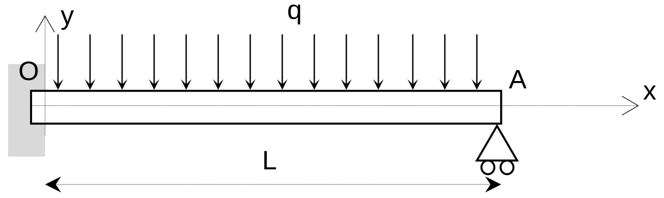
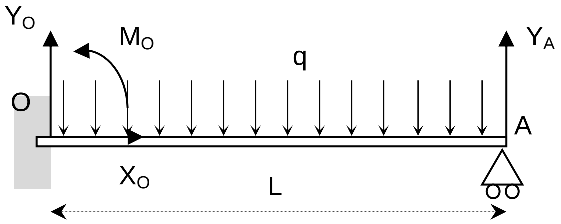
Théorèmes énergétiques

Soit une poutre encastrée soumise à une charge répartie q (la charge peut modéliser par exemple son propre poids).

Modèle géométrique et de liaison.



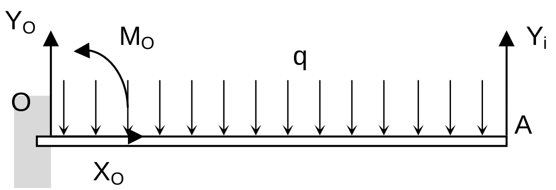
Degré d'hyperstaticité



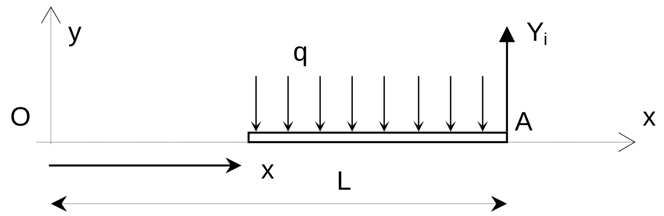
Le PFS nous donne Trois équations pour quatre inconnues de liaison. Le système est hyperstatique de degré 1.

Choix des inconnues hyperstatiques et système isostaique associé

Nous choisissons $Y_i = Y_A$ comme inconnue hyperstatique. Le système isostatique associé correspond donc à la poutre encastrée soumis à un effort Y_i au point A.



Calcul du torseur des efforts intérieurs en fonction des inconnues hyperstatiques



Le calcul des éléments de réduction donne

$T_y=-q.(L-x)+Y_i$

$Mf_z=-q\frac{(L-x)^2}{2}+Y_i.(L-x)$

Calcul de l'énergie de déformation

$$dW=\frac{1}{2}\frac{Mf_z^2}{EI_z}.dx$$

$W=\frac{1}{2}\int_{(OA)}\frac{Mf_z^2}{EI_z}.dx$

Condition de déplacement nul en A

$$\frac{\partial W}{\partial Y_i}=0$$

On déduit

$$\int_{(OA)} Mf_z.\frac{\partial Mf_z}{\partial Y_i}.dx = 0$$

$$\int_0^L \left\{-q\frac{(L-x)^2}{2}+Y_i.(L-x)\right\}.(L-x).dx = 0$$

D'où

$$-q.\frac{L^4}{8}+Y_i.\frac{L^3}{3}=0$$

$$Y_A=Y_i=\frac{3}{8}.\ qL$$