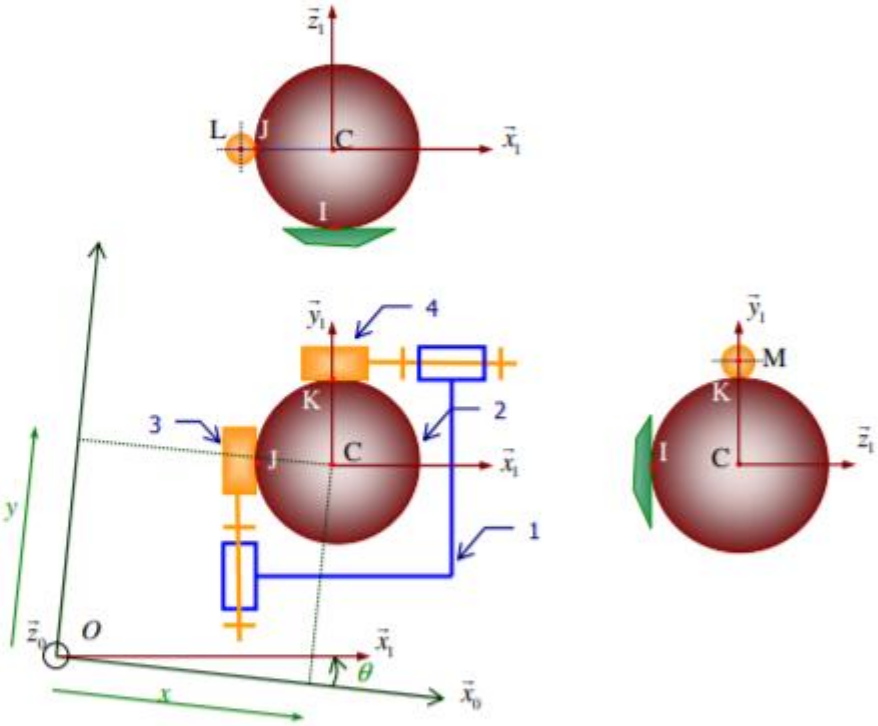
Problème (extrait de sujet) : Souris d'ordinateur

Les mouvements de la souris sont détectés à l'aide d'une bille (2) qui roule sans glisser sur le tapis de la souris. Cette souris entraine en mouvement deux galets (3) et (4) qui sont liés aux axes de rotation de deux capteurs angulaires. On cherche l'expression des vitesses de rotation mesurées par ces deux capteurs angulaires en fonction de la vitesse de déplacement de la souris sur le tapis.



- Le plan de travail est indicé (0), auquel est associé le repère $R_0 = (O; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- Le cadre lié à la souris porte le numéro (1), auquel est associé le repère $R_1 = (C; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- En fonctionnement normal, la bille (2) de rayon R roule sans glisser en I, sur le plan (0) ;
- Le galet (3), de rayon a, fait l'objet d'une liaison pivot d'axe $(L, \vec{y}_1)$ avec le cadre (1) ;
- Le galet (4), de rayon a, fait l'objet d'une liaison pivot d'axe $(M, \vec{x}_1)$ avec le cadre (1) ;

Les galets commandent des potentiomètres. En fonctionnement normal, ils roulent sans glisser, respectivement en J et K sur la bille (2).

On note $\vec{\Omega}_{(3/1)} = \omega_{3/1}\, \vec{y}_1$ le vecteur vitesse instantanée de rotation de (3) par rapport à (1) et $\vec{\Omega}_{(4/1)} = \omega_{4/1}\, \vec{x}_1$ le vecteur vitesse instantanée de rotation de (4) par rapport à (1).

Le solide (1) est animé d'un mouvement plan par rapport au solide (0). La condition de contact en I impose $\overrightarrow{OC}.\vec{z}_0 = R$.

La position de (1) par rapport à (0) est définie par :

$$\overrightarrow{OC} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + R\vec{z}_0$$

$$\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) \text{ avec } \vec{z}_0 = \vec{z}_1$$

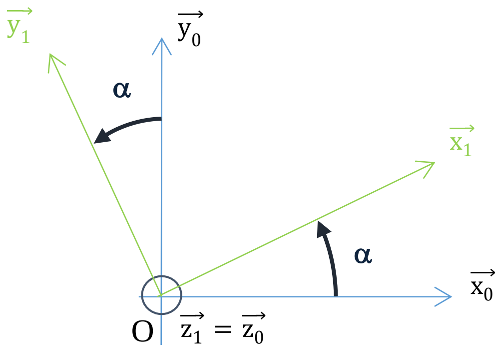
Le torseur cinématique associé au mouvement de la bille (2) par rapport au cadre (1) est défini par :

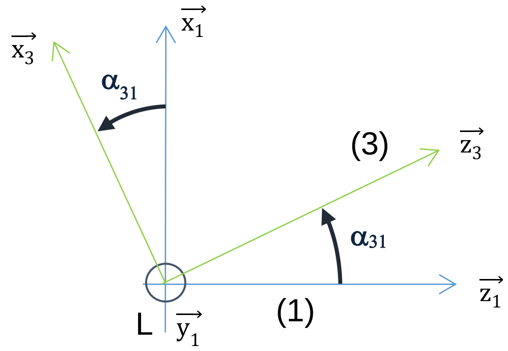
$$[C_{2/1}] = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} = \omega_x \vec{x}_0 + \omega_y \vec{y}_0 + \omega_z \vec{z}_0 \\ \vec{V}_{c\in 2/1} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Pour l'instant les composantes $\omega_x, \omega_y et\ \omega_z$ du vecteur vitesse instantanée de rotation sont inconnues. On se donne le mouvement du cadre (1) par rapport au plan (0). A savoir :

$$[C_{1/0}] = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\ \vec{z}_0 \\ \vec{V}_{c\in 1/0} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 \end{Bmatrix}$$

1. Expliciter la condition de roulement sans glissement en I. En déduire la vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}_{2/1}$ en fonction des données (seules les composantes $\omega_x et\ \omega_y$ seront calculées).
2. Expliciter la condition de roulement sans glissement en J. En déduire la vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}_{3/1}$ en fonction des données.
3. Expliciter la condition de roulement sans glissement en K. En déduire le vecteur vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}_{4/1}$ en fonction des données.
4. Montrer que la vitesse $\vec{V}_{C,1/0}$ en projection sur la base $\mathcal{B}_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ s'exprime simplement en fonction des 2 vitesses angulaires $\omega_{3/1}$ et $\omega_{4/1}$ mesurées par les deux capteurs angulaires.
5. En déduire l'expression de l'accélération du point C du solide 1 dans son mouvement par rapport à 0 : $\vec{a}_{C,1/0}$





$$\overrightarrow{V_{I,2/0}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{V_{I,2/0}} = \overrightarrow{V_{I,2/1}} + \overrightarrow{V_{I,1/0}}$$

2/1 : C point de vitesse nulle : $\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \overrightarrow{V_{C,2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \vec{CI} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}_0 \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} -R.\omega_y \\ R.\omega_x \\ 0 \end{pmatrix}_0$

1/0 : C de vitesse connue : $\overrightarrow{V_{I,1/0}} = \overrightarrow{V_{C,1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{CI} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_0 \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix}_0$

On déduit :

$$\begin{cases} \dot{x} - R.\omega_y = 0 \\ \dot{y} + R.\omega_x = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{V_{J,2/3}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{V_{J,2/3}} = \overrightarrow{V_{J,2/1}} - \overrightarrow{V_{J,3/1}}$$

2/1 : C point de vitesse nulle :

$$\overrightarrow{V_{J,2/1}} = \overrightarrow{V_{C,2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{CJ} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}_0 \wedge \begin{pmatrix} -R.\cos(\theta) \\ -R.\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} R.\omega_z.\sin(\theta) \\ -R.\omega_z.\cos(\theta) \\ R.(\omega_y.\cos(\theta) - \omega_x.\sin(\theta)) \end{pmatrix}_0$$

3/1 : rotation de centre L : $\overrightarrow{V_{J,3/1}} = \overrightarrow{\Omega_{3/1}} \wedge \overrightarrow{LJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{31} \\ 0 \end{pmatrix}_1 \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a.\omega_{31} \end{pmatrix}_1$

On déduit en projection sur z_0:

$$R.\omega_y.\cos(\theta) - R.\omega_x.\sin(\theta) = a.\omega_{31}$$

$$\overrightarrow{V_{K,2/4}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{V_{K,2/4}} = \overrightarrow{V_{K,2/1}} - \overrightarrow{V_{K,4/1}}$$

2/1 : C point de vitesse nulle :

$$\overrightarrow{V_{K,2/1}} = \overrightarrow{V_{C,2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{CK} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}_0 \wedge \begin{pmatrix} -R.\sin(\theta) \\ R.\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} -R.\omega_z.\cos(\theta) \\ -R.\omega_z.\sin(\theta) \\ R.(\omega_x.\cos(\theta) + \omega_y.\sin(\theta)) \end{pmatrix}_0$$

4/1 : rotation de centre M : $\overrightarrow{V_{K,4/1}} = \overrightarrow{\Omega_{4/1}} \wedge \overrightarrow{MK} = \begin{pmatrix} \omega_{41} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a.\omega_{41} \end{pmatrix}$

On déduit :

$$R.(\omega_x.\cos(\theta) + \omega_y.\sin(\theta)) = a.\omega_{41}$$

$$\overrightarrow{V_{C,1/0}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}_0$$

$$\dot{x} = a.\{\omega_{31}.\cos(\theta) + \omega_{41}.\sin(\theta)\}$$

$$\dot{y} = a.\{\omega_{31}.\sin(\theta) - \omega_{41}.\cos(\theta)\}$$

$$\overrightarrow{a_{C,1/0}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} -\omega_{31}.\sin(\theta) + \omega_{41}.\cos(\theta) \\ \omega_{31}.\cos(\theta) + \omega_{41}.\sin(\theta) \end{pmatrix}_0 .a.\dot{\theta}$$