Modélisation des liaisons et paramétrage

Introduction et hypothèses

1. Modélisation d'un mécanisme

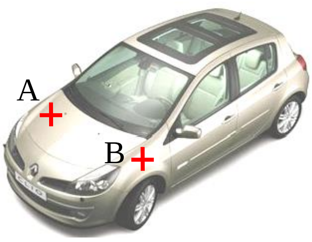
La cinématique est la science des mouvements. Elle concerne presque essentiellement les systèmes mécaniques composés de mécanismes.
Un mécanisme est un ensemble de pièces liées entre elles par des liaisons en vue de réaliser une fonction particulière. Cette fonction est liée aux lois entrée-sortie cinématiques et donc aux mouvements relatifs des pièces les unes par rapport aux autres.
Les mécanismes réels sont pour la plupart très complexes et leur étude cinématique impose une modélisation qui permet de simplifier le système réel en faisant abstraction d'un certain nombre de paramètres secondaires ou d'imperfections inhérentes au réel.

Hypothèses liées aux pièces

On considère que les pièces mécaniques peuvent être modélisées par des <u>solides indéformables</u>.

Un solide est dit indéformable lorsque, quels que soient les points A et B de ce solide, la distance AB reste constante au cours du mouvement.

On se limitera par la suite à appeler « solide » un solide indéformable.



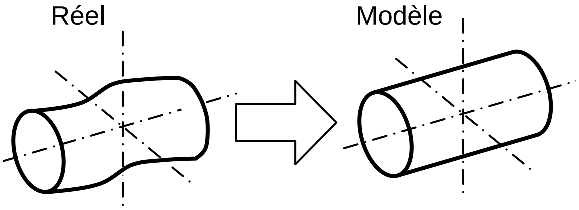
$$\forall \text{ A et B} \in (S), \forall t, \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \text{cte}$$

Hypothèses liées aux liaisons

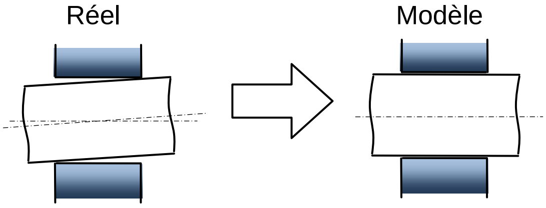
Les modèles de liaison sont généralement basés sur 2 hypothèses :

- L'hypothèse de géométrie parfaite
- L'hypothèse de liaison sans jeu

<u>Hypothèse 1 : géométrie parfaite</u>



<u>Hypothèse 2 : liaison sans jeu</u>



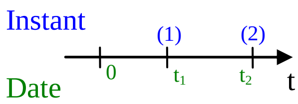
2. Notion de référence

1-1 <u>Référentiel</u>

En cinématique, le mouvement d'un solide sera défini par rapport à un autre solide choisi comme référence et appelé solide de référence. Un système de référence est l'association ou la combinaison d'un repère espace de référence et d'un repère de temps.

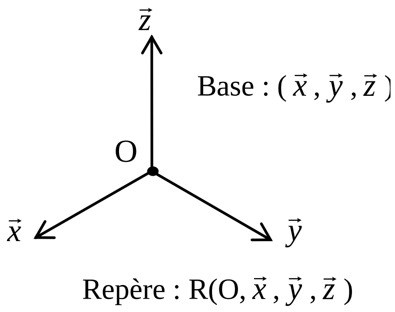
Repère de temps

Le temps (t) permet de repérer tout instant par la date. On suppose qu'il s'écoule de la même façon en tout point.
Son unité de référence est la seconde (s).



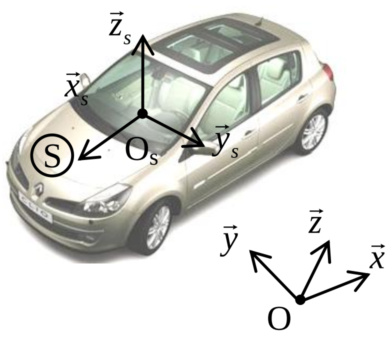
Repère d'espace

L'espace Physique est l'espace volumique perçu par nos sens et dans lequel se produiront les phénomènes mécaniques courants.
Afin de représenter les systèmes matériels étudiés, on associe à cette notion d'espace : un Espace Affine euclidien à trois dimensions dans lequel on définit :
- O : un point pris comme origine
- b : une base orthonormée directe
- R(O, b) : un repère de l'espace



3. Position d'un solide par rapport à un repère

Pour définir la position d'un solide (S) par rapport à un repère R=(O,$\vec{x}$,$\vec{y}$,$\vec{z}$), il faut d'abord commencer par lier à ce solide un repère R_S=(O_S,$\vec{x_S}$,$\vec{y_S}$,$\vec{z_S}$) et ensuite définir la position du repère R_s par rapport au repère R.



Comme le solide est considéré comme indéformable et que la position relative des axes d'un repère est invariante au cours du temps, on peut considérer qu'il y a <u>équivalence entre le solide et son repère associé.</u>

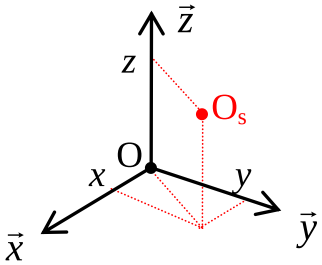
Le repère R_s étant caractérisé par son origine O_s et sa base ($\vec{x_S}$,$\vec{y_S}$,$\vec{z_S}$), il faut d'abord définir la position de l'origine O_S dans R puis l'orientation de la base ($\vec{x_S}$,$\vec{y_S}$,$\vec{z_S}$) de R_S par rapport à la base ($\vec{x}$,$\vec{y}$,$\vec{z}$) de R.

<u>3.1. Paramétrage de la position de O_S dans R</u>

On utilise usuellement 3 types de coordonnées pour définir la position de O_s dans le repère R.

✓ Les coordonnées cartésiennes (x,y,z)

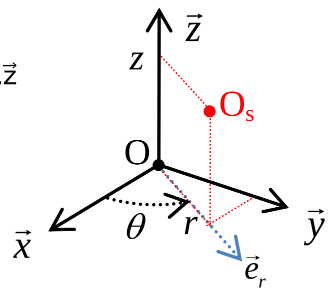
$$\overrightarrow{OO_s} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



✓ Les coordonnées cylindriques (r,θ,z)

$$\overrightarrow{OO_s} = r.\vec{e_r} + z.\vec{z}$$

$$\theta = (\vec{x},\vec{e_r})$$

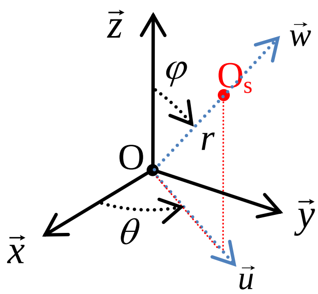


✓ Les coordonnées sphériques (r,θ,φ)

$$\overrightarrow{OO_s} = r.\vec{w}$$

$$\theta = (\vec{x},\vec{u})$$

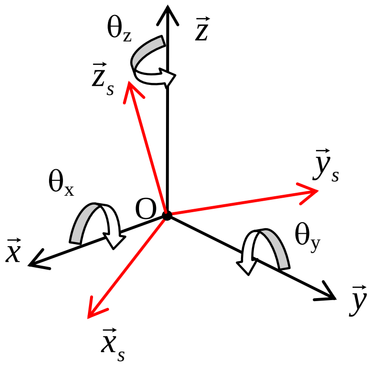
$$\varphi = (\vec{z},\vec{w})$$



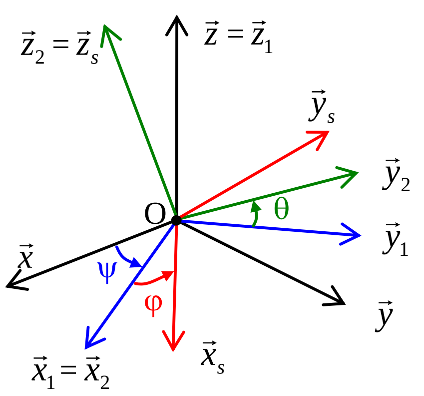
3.2. Paramétrage de la base de R_S par rapport à la base de R

Le paramétrage de la base de R_s par rapport à la base de R s'effectue par le biais de trois angles indépendants.

Ces trois angles peuvent correspondre aux orientations autour des axes $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$



En cinématique, on utilise généralement un paramétrage par les angles d'Euler utilisant des bases intermédiaires beaucoup plus pratiques pour les expressions des grandeurs cinématiques. Ils correspondent à trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec la base $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$.

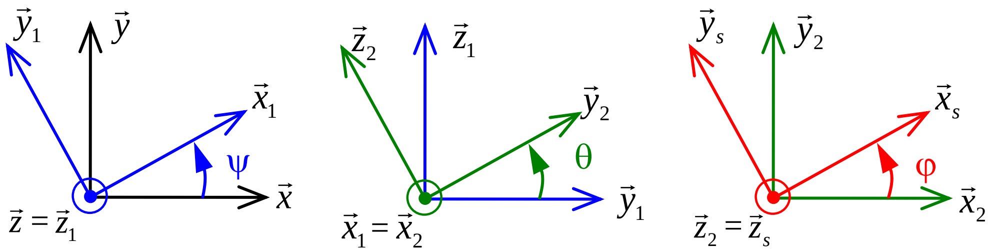


La première rotation est une rotation d'angle ψ autour de l'axe (O, $\vec{z}$), ψ est appelé <u>angle de précession</u>. Elle permet de passer de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ vers une base intermédiaire $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$.

La deuxième rotation est une rotation d'angle θ autour de l'axe (O, $\vec{x}_1$), θ est appelé <u>angle de nutation</u>. Elle permet de passer de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ vers une seconde base intermédiaire $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.

La troisième rotation est une rotation d'angle φ autour de l'axe (O, $\vec{z}_2$), φ est appelé angle de <u>rotation propre</u>. Elle permet de passer de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ vers la base $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$.

Les figures planes sont très utiles pour la résolution des problèmes.



On utilise ces angles notamment dans l'étude des gyroscopes.

Introduction aux liaisons

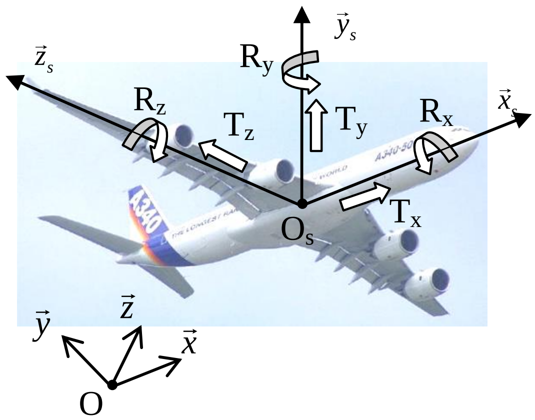
Dans l'espace, un solide possède donc 6 Degrés De Liberté (DDL):

- 3 degrés de liberté de translation (liés à la position de O_s par rapport à R) : T_x, T_y, T_z
- 3 degrés de liberté de rotation autour de O_s (liés à l'orientation de la base de R_s / R : R_x, R_y, R_z

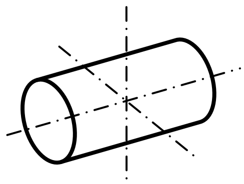
Il faut 6 paramètres pour positionner un solide dans l'espace :

- 3 paramètres permettant de positionner un point du solide (homogènes à une longueur)

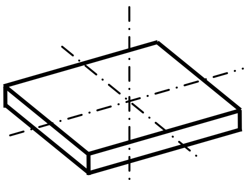
- 3 paramètres angulaires permettant de définir l'orientation du solide (homogène à une mesure angulaire)



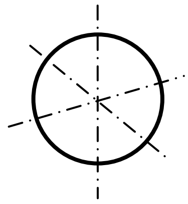
Les liaisons entre solides ou ensembles de solides permettent de supprimer un certain nombre de degrés de liberté. Les différentes liaisons simples s'effectuent à partir de trois surfaces élémentaires supposées parfaites :



Le cylindre de révolution



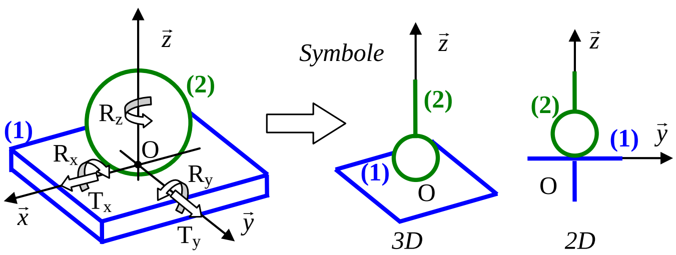
Le plan



La sphère

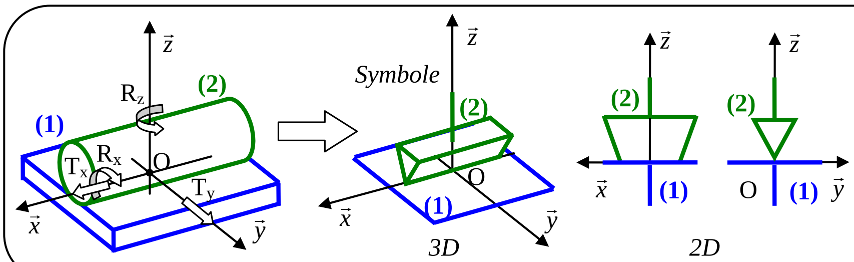
1. Liaisons simples (Association de surfaces élémentaires)

L'association de deux surfaces élémentaires d'un solide (2) et d'un solide (1) permet de contraindre les mouvements de (2)/(1). On les appelle les liaisons simples. On peut les caractériser par les degrés de libertés supprimés ou par les paramètres cinématiques nécessaires pour positionner (2)/(1).



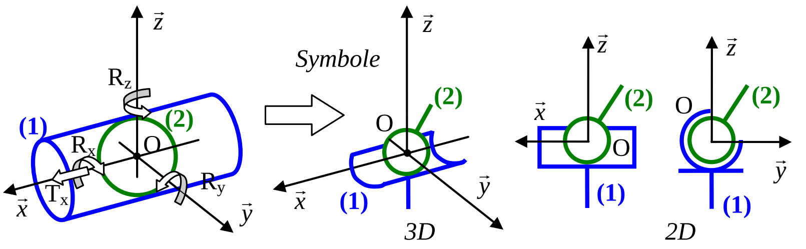
(2)/(1) : Liaison sphère/plan ou ponctuelle en O de normale (O, $\vec{z}$)
On supprime 1 degré de liberté :
$\cancel{T_z}$

Il reste 5 paramètres cinématiques



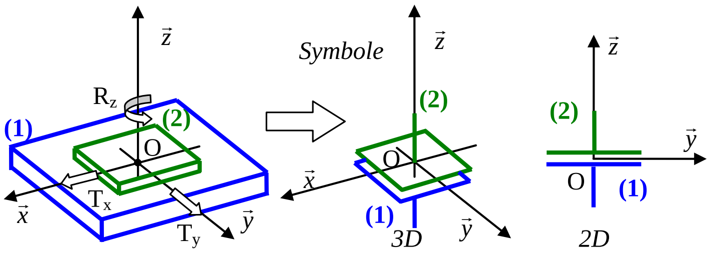
(2)/(1) : Liaison linéaire rectiligne d'axe (O, $\vec{x}$) de normale (0, $\vec{z}$)
On supprime 2 degrés de liberté :
$\cancel{T_z}$ $\cancel{R_y}$

Il reste 4 paramètres cinématiques



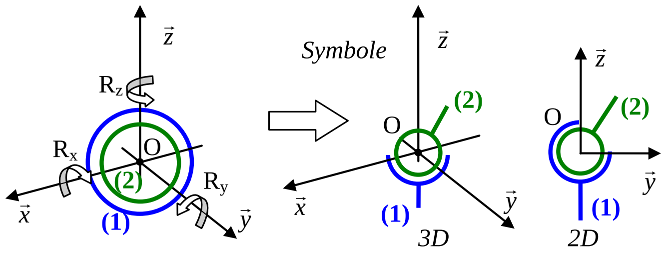
(2)/(1) : Liaison sphère/cylindre ou linéaire annulaire d'axe (O, $\vec{x}$)
On supprime 2 degrés de liberté :
$\cancel{T_y}$ $\cancel{T_z}$

Il reste 4 paramètres cinématiques



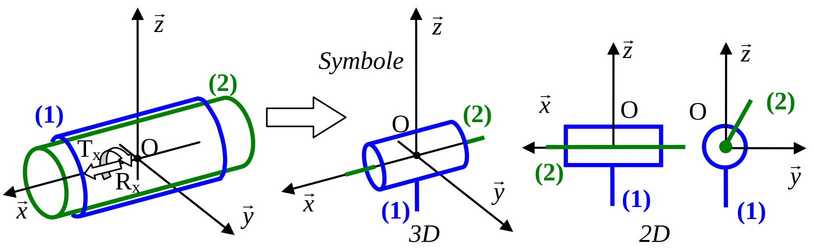
(2)/(1) : Liaison appui plan de normale (O, $\vec{z}$)
On supprime 3 degrés de liberté :
$\cancel{T_z}$ $\cancel{R_x}$ $\cancel{R_y}$

Il reste 3 paramètres cinématiques



(2)/(1) : Liaison sphère/sphère ou rotule en O
On supprime 3 degrés de liberté :
$\cancel{T_x}$ $\cancel{T_y}$ $\cancel{T_z}$

Il reste 3 paramètres cinématiques

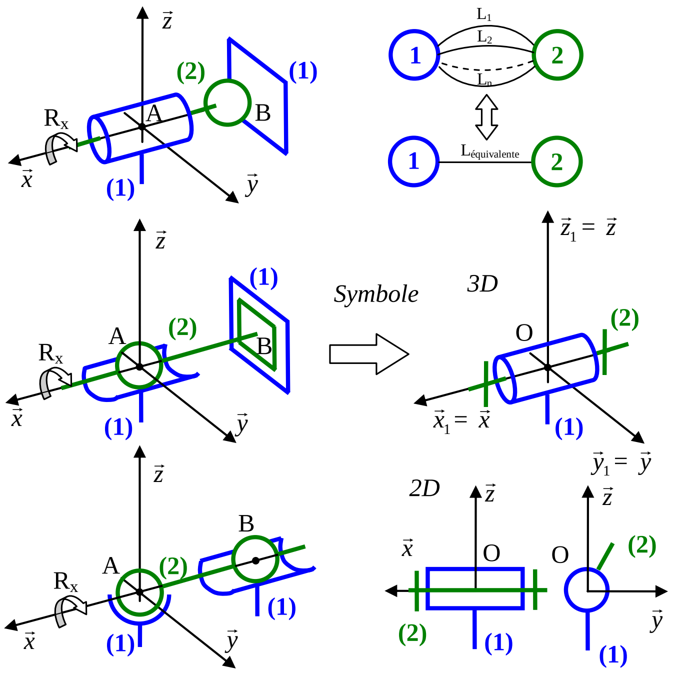


(2)/(1) : Liaison pivot glissant d'axe (O, $\vec{x}$)
On supprime 4 degrés de liberté :
$\cancel{T_y}$ $\cancel{T_z}$ $\cancel{R_y}$ $\cancel{R_z}$

Il reste 2 paramètres cinématiques

2. Liaisons composées (à un degré de liberté)

La combinaison en parallèle des liaisons simples permet d'accéder à des liaisons composées.



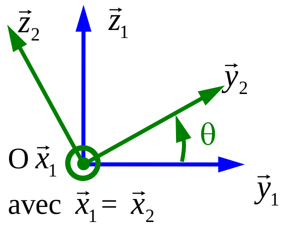
La liaison pivot

(2)/(1) : Liaison pivot d'axe (O, $\vec{x}_1$)
On supprime 5 degrés de liberté :
$\cancel{T_x}\,\cancel{T_y}\,\cancel{T_z}\,\cancel{R_y}\,\cancel{R_z}$

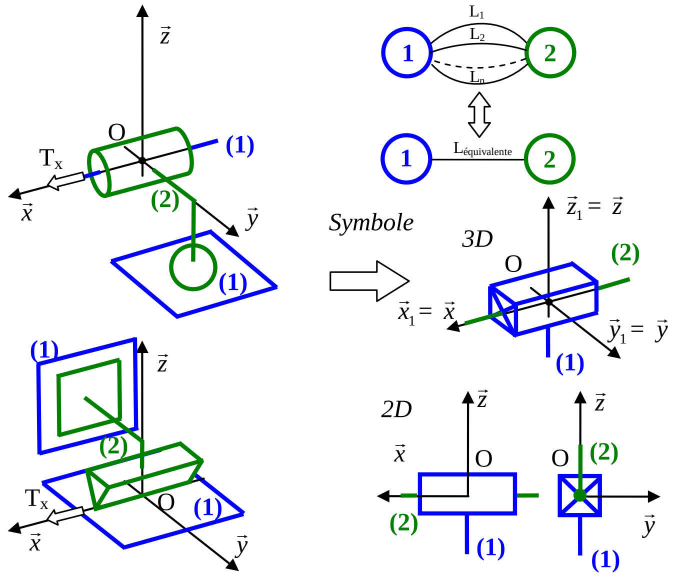
Il reste 1 paramètre cinématique

Définition du paramètre :

$\theta = \theta_{x,2/1} = (\widehat{\vec{y}_1, \vec{y}_2}) = (\widehat{\vec{z}_1, \vec{z}_2})$



avec $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$

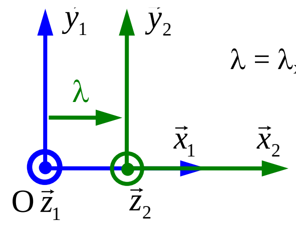


La liaison glissière

(2)/(1) : Liaison glissière d'axe (O, $\vec{x}_1$)
On supprime 5 degrés de liberté :
$\cancel{T_y}\,\cancel{T_z}\,\cancel{R_x}\,\cancel{R_y}\,\cancel{R_z}$

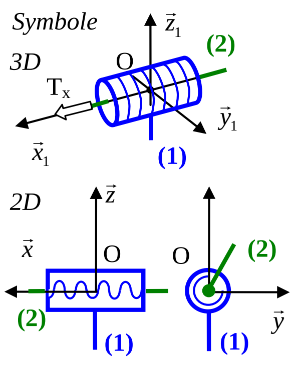
Il reste 1 paramètre cinématique

Définition du paramètre :

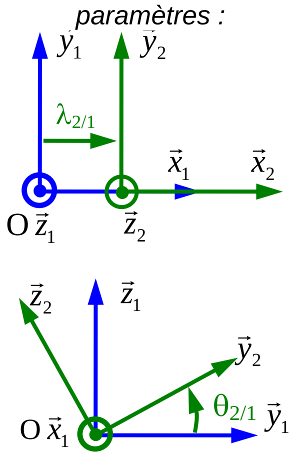


$\lambda = \lambda_{x,2/1}$

La liaison hélicoïdale



Définition des paramètres :



(2)/(1) : Liaison hélicoïdale d'axe (O, $\vec{x}_1$)

On supprime 5 degrés de liberté :
$\cancel{T_y}\,\cancel{T_z}\,\cancel{R_y}\,\cancel{R_z}$ + 1 <u>relation de dépendance</u> entre T_x et R_x

Il reste <u>1 paramètre cinématique indépendant</u>

Relation de dépendance :
$\lambda_{2/1} = \theta_{2/1}.\text{pas}/(2\pi)$ pour un filet à droite

Agencement des liaisons et paramétrage

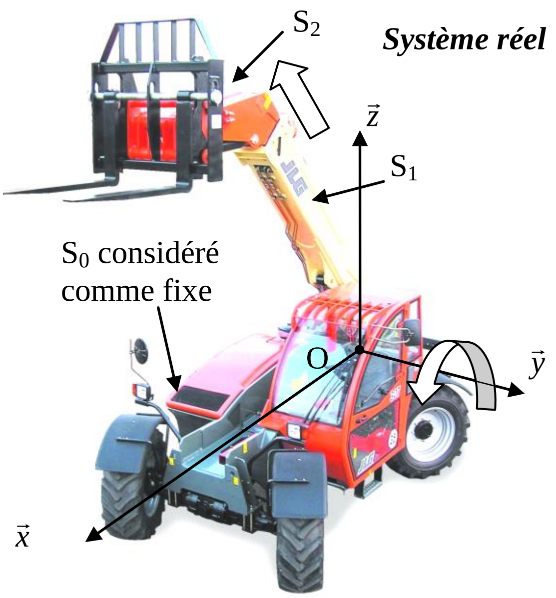
L’ensemble des liaisons dans un mécanisme permet d’établir des relations entre les différents paramètres cinématiques définis précédemment. On distingue deux grandes familles d’agencement des liaisons :

Les chaînes cinématiques ouvertes

Type bras de manipulation

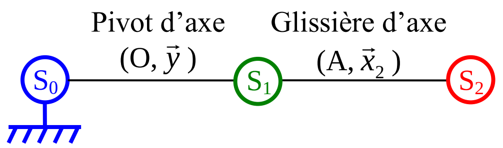
Dans ce cas, la relation demandée concerne souvent un point en bout de chaîne.

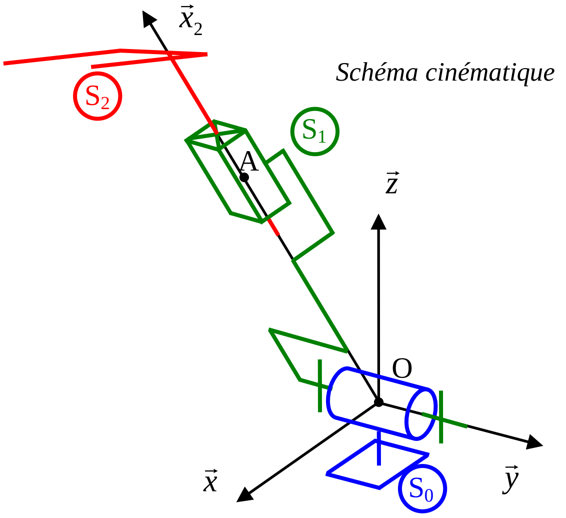
Exemple d’une nacelle élévatrice



Modèle

Graphe des liaisons



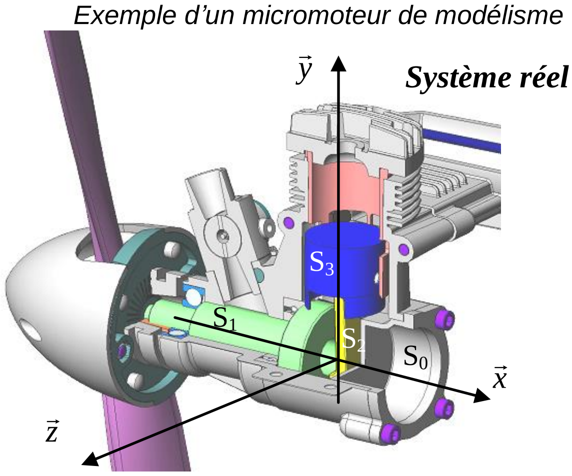


Les chaînes cinématiques fermées

Type mécanismes de transformation de mouvements

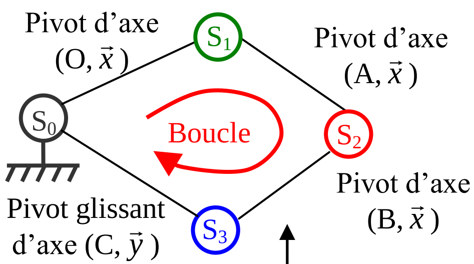
Dans ce cas, la relation demandée concerne souvent la loi d’entrée/sortie du mécanisme.

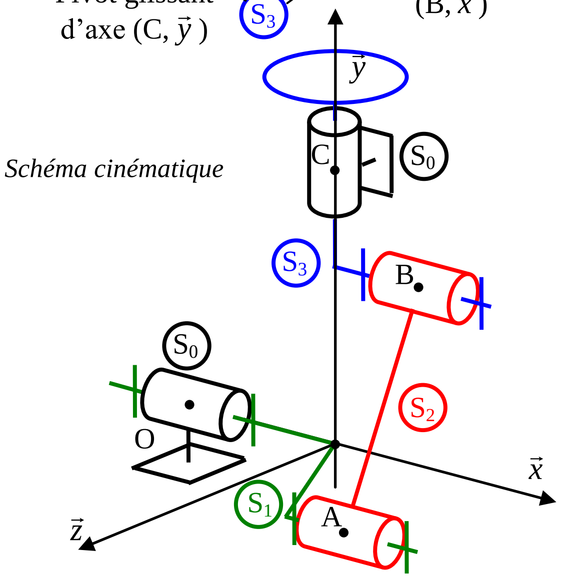
Exemple d’un micromoteur de modélisme



Modèle

Graphe des liaisons





1. Le schéma cinématique minimal, outil de visualisation du paramétrage cinématique

L'outil de schématisation permettant de visualiser les différents mouvements dans le mécanisme étudié est le schéma cinématique minimal. L'élaboration du schéma cinématique minimal s'appuie sur la démarche suivante vu en cours de technologie :

On identifie tous les regroupements possibles de pièces : Classes d'Equivalence Cinématiques (CEC).

Il serait en effet inutile et fastidieux de considérer individuellement toutes les pièces sans commencer par regrouper celles qui sont liées (sans mouvement relatif).

↓

Entre chaque CEC, on s'interroge sur la nature de la liaison. Deux questions sont utiles :

- Quelle est la nature des surfaces en contact entre les solides (pertinent pour des liaisons à forts degré de liberté : ponctuelle, linéique, …)
- Quels sont les mouvements relatifs possibles entre les solides (pertinent pour les liaisons à faibles degrés de liberté : pivot, glissière, …)

↓

On effectue le graphe des liaisons pour définir chaque liaison entre ensembles.

Le graphe des liaisons peut s'avérer un outil intéressant :
- pour aider à définir correctement chaque liaison (définition géométrique)
- pour conduire une étude dynamique (identification des actions mécaniques et démarche d'isolement)

↓

On élabore le schéma cinématique minimal

On s'appuie sur le graphe des liaisons (définition géométrique) et sur les représentations normalisées des différents composants technologiques (engrenages, roues de friction, …)

↓

A partir du schéma cinématique, on peut définir les mobilités du mécanisme ainsi que les degrés de liaison surabondants (cours de technologie)

Mobilité interne m_i : nombre de paramètres cinématiques ne participant pas au mouvement du système.

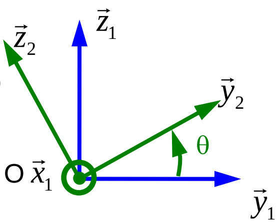
Mobilité utile m_u : nombre de paramètres cinématiques indépendants.

↓

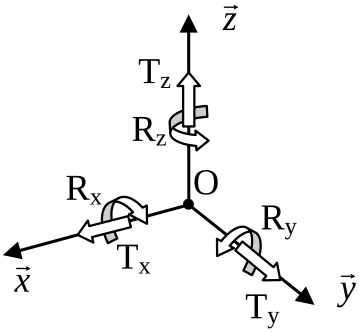
Le schéma cinématique permet de définir les paramètres cinématiques

Ils sont donnés algébriquement

Liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_1)$
et de paramètre θ



2. Visualisation des paramètres cinématiques



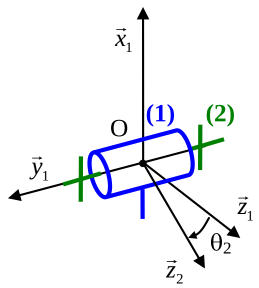
Pour définir la position du solide (2)/(1), on retrouve deux types de paramètres :

- les paramètres de translation (par exemple λ_x, λ_y et λ_z)
- les paramètres de rotation (par exemple θ_x, θ_y et θ_z)

Ils sont donnés algébriquement.

Il est fortement conseillé de représenter ces paramètres sur des figures planes.

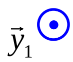
Exemple de construction d'une figure plane



Etape 1 - On identifie l'axe de la liaison

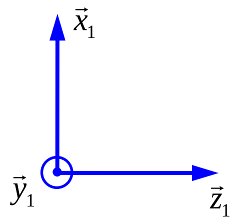
Il est conseillé de représenter toujours cet axe venant vers vous

Sur l'exemple, il s'agit d'une liaison pivot d'axe (O, $\vec{y}_1$)



Etape 2 - On trace le repère de référence

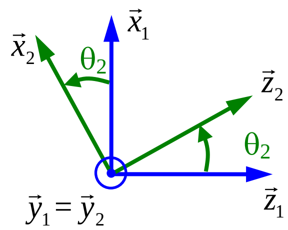
Il est IMPERATIF que le repère ainsi tracé soit orthonormé direct



Sur l'exemple, on trace le repère 1 et l'axe $\vec{y}_1$ venant vers nous, $\vec{x}_1$ et $\vec{z}_1$ sont forcément positionnés comme sur la figure (sens direct)

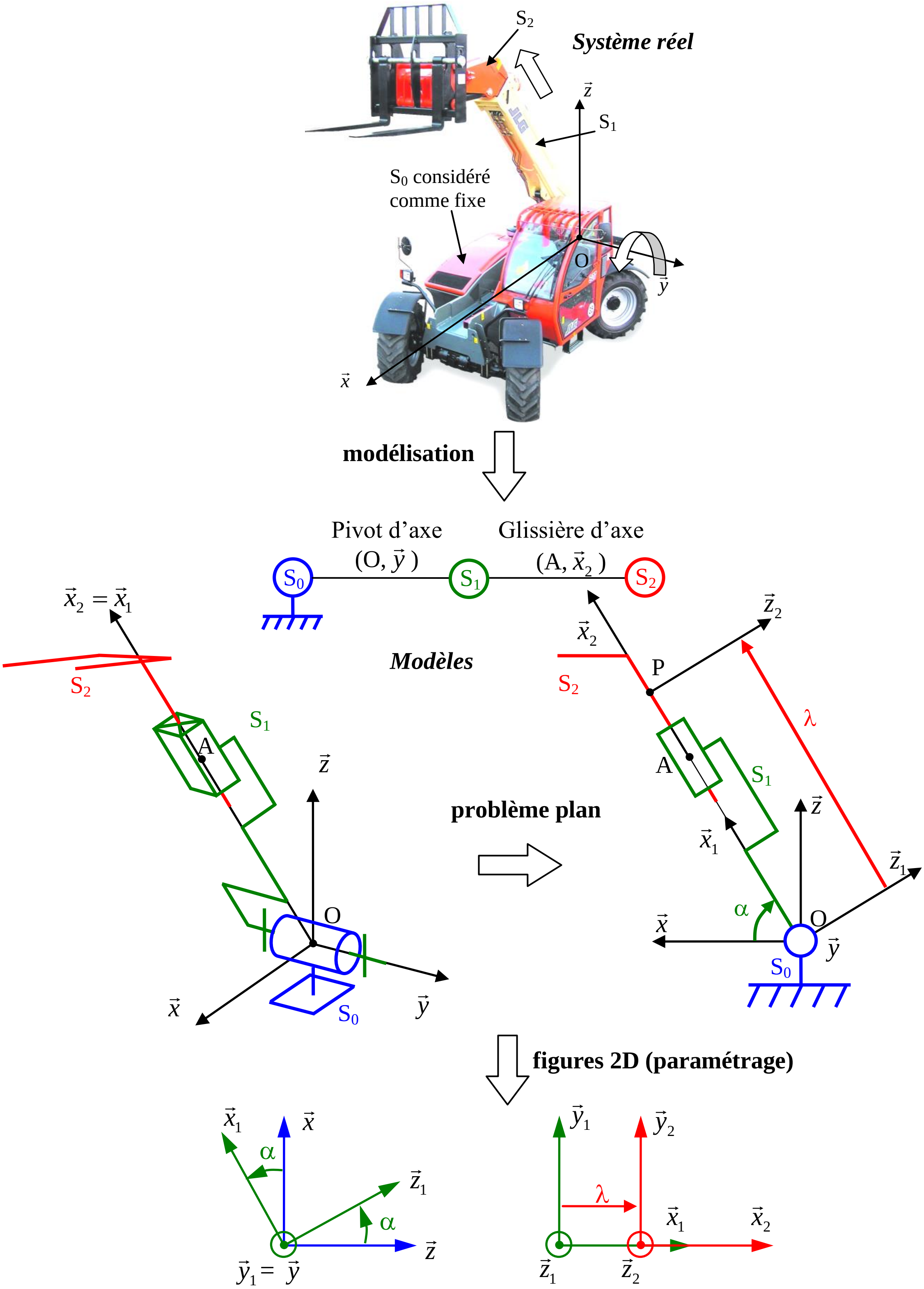
Etape 3 - On identifie le paramètre angulaire (de quel axe part il ? sur quel axe arrive t'il ?) et on trace l'autre repère

Il est IMPERATIF que le paramètre angulaire soit représenté dans le premier cadran compris entre 0 et $\pi/2$



Sur l'exemple, on ne se soucie pas de la valeur de l'angle représenté sur le schéma en perspective de la liaison (négatif ici). On représente cet angle indépendamment de sa valeur et de son signe.

3. Exemple : paramétrage d'une nacelle élévatrice



Le système est une chaine cinématique ouverte et il est défini cinématiquement avec 2 paramètres indépendants α et λ.

Si rien n'est précisé dans l'énoncé, les paramètres sont algébriques. Les angles sont alors définis sur les figures 2D positifs dans le premier cadran (entre 0 et $\pi/2$).
C'est le cas ici pour le paramètre α.