

## EPREUVE DE MECANIQUE 2 Module I3ICMG20 (1h15')

Toutes les questions sont indépendantes sauf la question 6.  
Barème approximatif : Partie 1, 10 points, Partie 2, 10 points.

### Introduction :

L'évolution des performances des avions de chasse génère des conditions de vol toujours plus sévères. Un pilote en situation d'exercice doit pouvoir supporter des accélérations de l'ordre de 10g (g étant l'accélération de la pesanteur). Dans ces conditions, le sang peut avoir tendance à quitter le cerveau et à s'accumuler dans les membres inférieurs entraînant alors une perte de connaissance connue sous l'appellation de voile noir.

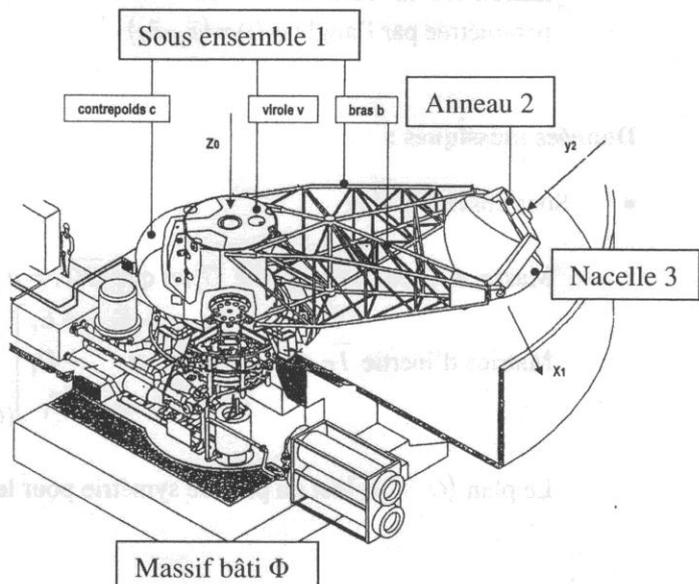
Les valeurs de ces accélérations, leur vitesse d'établissement et leur durée de maintien imposent d'étudier les réactions de l'organisme. Ainsi les pilotes se testent et s'entraînent à bord d'une centrifugeuse, système constitué d'une nacelle articulée à l'extrémité d'un bras en rotation. Le pilote est ainsi placé dans la nacelle et sa surveillance est assurée par des équipements qui enregistrent les modifications physiologiques. Par exemple, lorsque au cours de l'entraînement la rampe d'accélération fait passer l'accélération simulée de la pesanteur autour de 15g en environ 2 secondes, il devient possible de constater une déformation du squelette ainsi qu'une descente du cœur dans la poitrine de l'ordre de 10 cm.

Les paragraphes suivants portent donc sur une centrifugeuse humaine qui équipe le laboratoire de Médecine Aérospatiale, support de ce sujet.

### Présentation du mécanisme :

Le plan de situation figure 1 présente cette centrifugeuse qui se compose de 4 éléments principaux :

- un massif-bâti en béton  $\Phi$  sur lequel est rigidement ancré un axe assurant le guidage en rotation du sous ensemble 1 autour d'un axe vertical
- un sous ensemble 1 en rotation autour de l'axe vertical qui est composé d'un contrepoids c, d'une virole v et d'un bras en treillis tubulaire b
- un anneau 2, interposé entre la nacelle et le bras, autorisant les rotations autour des 2 axes orthogonaux (roulis et tangage)
- une nacelle instrumentée 3 équipée du siège pour le pilote



Aux 4 éléments précédents s'ajoutent des équipements complémentaires comme :

- un générateur de puissance hydraulique
- un réducteur pouvant transmettre une puissance de l'ordre de 1MW pour le mouvement de rotation du sous ensemble 1 par rapport à 0
- une motorisation embarquée pour les mouvements de rotation de roulis et de tangage
- un système d'asservissement pour chaque actionneur

Cette conception permet de lier de façon univoque, les profils de position (ou de vitesse relative) engendrés au niveau de chaque liaison à l'évolution temporelle des 3 composantes d'accélération que subit le pilote. Ainsi les consignes de position ou de vitesse à appliquer aux liaisons sont directement déduites de l'accélération à reproduire. La vitesse de rotation du bras détermine l'intensité de l'accélération imposée au pilote et l'orientation de la nacelle en roulis et tangage fixe la direction de l'accélération imposée au pilote.

### Modélisation cinématique et paramétrage :

La figure 2 représente le modèle cinématique pour l'étude défini à partir du système réel :

- le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$  est lié au bâti  $\Phi$ , ce repère sera considéré comme galiléen. Le champ de la pesanteur est défini par  $\bar{g} = +g \bar{z}_0$ ,
- le repère  $\mathcal{R}_1 = (O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  est lié au sous ensemble 1 (composée du contrepoids c, de la virole v et du bras en treillis tubulaire b). La liaison 1/ $\Phi$  est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe  $(O, \bar{z}_0)$ , sa position est paramétrée par l'angle  $\psi(t) = (\bar{x}_0, \bar{x}_1)$ ,
- le repère  $\mathcal{R}_2 = (I, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$  est lié à l'anneau 2. La liaison 2/1 est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe  $(I, \bar{x}_1)$ , sa position est paramétrée par l'angle  $\theta(t) = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ ,  $\theta$  est appelé angle de roulis,
- le repère  $\mathcal{R}_3 = (I, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$  est lié à la nacelle 3 dans laquelle prend place le pilote. La liaison 3/2 est considérée comme une liaison pivot parfaite d'axe  $(I, \bar{y}_2)$  sa position est paramétrée par l'angle  $\varphi(t) = (\bar{x}_2, \bar{x}_3)$

### Données massiques :

- Sous ensemble (1) :

Masse  $m_1$ , centre de gravité  $G_1$  tel que  $\overline{OG_1} = a \bar{y}_1$

$$\text{Matrice d'inertie } \bar{I}_{G_1}(1) = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix} (G_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$$

Le plan  $(O, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  est un plan de symétrie pour le sous ensemble 1.

- Anneau (2) :

Masse  $m_2$ , centre de gravité I tel que  $\overrightarrow{OI} = -R \vec{y}_1$

$$\text{Matrice d'inertie } \bar{I}_I(2) = \begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{bmatrix}_{(I, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Les plans  $(I, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$  et  $(I, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  sont des plans de symétrie pour le solide 2.

- Nacelle et pilote (3) :

Masse  $m_3$ , le centre de gravité reste confondu avec le point I

$$\text{Matrice d'inertie } \bar{I}_I(3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(I, \vec{x}_3, \vec{y}_2, \vec{z}_3)} = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(I, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

### Partie 1 : Torseur Cinétique

Q1 : En tenant compte des données du problème, définir la forme simplifiée de la matrice d'inertie du sous ensemble 1 en  $G_1$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

Q2 : Déterminer le torseur cinétique  $\{C_i(1/0)\}_O = \left\{ \overrightarrow{R}_{c,1/0}, \overrightarrow{\sigma}_{O,1/0} \right\}$  au point  $O$  du sous ensemble (1) dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_o$  en projection sur la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

Q3 : En tenant compte des données du problème, définir la forme simplifiée de la matrice d'inertie de l'anneau 2 en  $I$  dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

Q4 : Déterminer le torseur cinétique  $\{C_i(2/0)\}_I = \left\{ \overrightarrow{R}_{c,2/0}, \overrightarrow{\sigma}_{I,2/0} \right\}$  au point  $I$  du solide (2) dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_o$  en projection sur la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

Q5 : Déterminer le torseur cinétique  $\{C_i(3/0)\}_I = \left\{ \overrightarrow{R}_{c,3/0}, \overrightarrow{\sigma}_{I,3/0} \right\}$  au point  $I$  du solide (3) dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_o$  en projection dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

Q6 : En déduire le torseur cinétique  $\{C_i(\mathcal{E}/0)\}_I = \left\{ \overrightarrow{R}_{c,\mathcal{E}/0}, \overrightarrow{\sigma}_{I,\mathcal{E}/0} \right\}$  au point  $I$  de l'ensemble  $\mathcal{E} = 2 + 3$  dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_o$ .

## Partie 2 : Torseur Dynamique

Q7 : Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(1/0)\}_O = \left\{ \overrightarrow{R_{d,1/0}}, \overrightarrow{\delta_{O,1/0}} \right\}_O$  au point  $O$  du sous ensemble (1) dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_o$  en projection sur base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

Q8 : Déterminer le torseur dynamique  $\{\mathcal{D}(3/0)\}_I = \left\{ \overrightarrow{R_{d,3/0}}, \overrightarrow{\delta_{I,3/0}} \right\}_I$  au point  $I$  de la nacelle 3 dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_o$  en projection sur la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

Q9 : A partir des données du problème, proposer sous forme d'organigramme vos différentes étapes de calcul afin de déterminer le moment dynamique au point  $O$   $\overrightarrow{\delta_{O,E/0}}$  de l'ensemble  $\mathcal{E} = 1 + 2 + 3$  dans son mouvement par rapport au repère  $\mathcal{R}_o$ .

### Formulaire Mécanique du Solide :

Torseur cinématique en un point A du mouvement d'un solide rigide :

$$[C_{S/\mathcal{R}}] = [\vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} \quad , \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})}]_A \quad \text{avec} \quad \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} = \vec{V}_{(B \in S/\mathcal{R})} + A\vec{B} \wedge \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}}$$

Relation de dérivation dans une base mobile :

$$\left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = \left( \frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{u}$$

Moment dynamique au point A d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}$  :

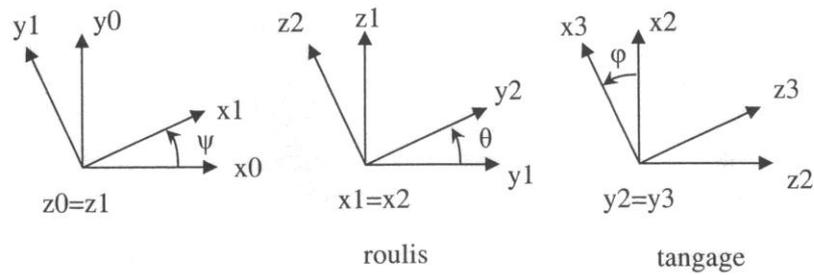
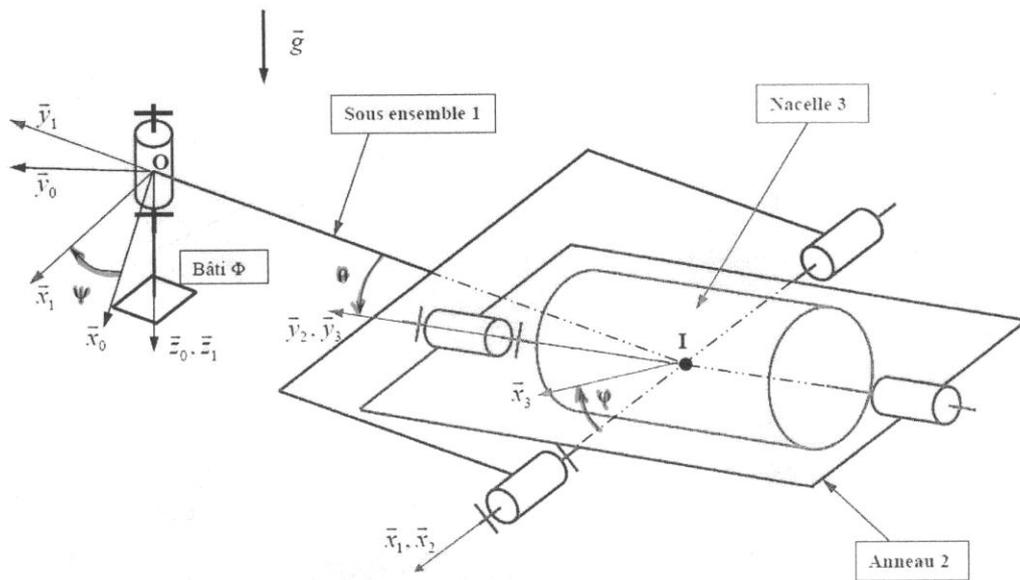
$$\vec{\delta}_{A(S/\mathcal{R})} = \left( \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} \right)_{\mathcal{R}} + m \vec{V}_{(A/\mathcal{R})} \wedge \vec{V}_{(G \in S/\mathcal{R})} \quad \text{avec} \quad A \in S$$

Moment cinétique au point A d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{\sigma}_{A(S/\mathcal{R})} = [I_{A,B(S)}] \vec{\Omega}_{S/\mathcal{R}} + m A\vec{G} \wedge \vec{V}_{(A \in S/\mathcal{R})} \quad \text{avec} \quad A \in S$$

$$\text{Matrice d'inertie en A d'un solide S : } [I_{A,B(S)}] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ \int_S (z^2+x^2)dm & -\int_S yzdm & \\ \int_S (x^2+y^2)dm & & \end{bmatrix}$$

$$\text{Théorème de Huygens : } [I_{A,B(S)}] = [I_{G,B(S)}] + [I_{A,B(G,m(S))}]$$



**Figure 2 : Modélisation cinématique et paramétrage**