Champ électrostatique

PRÉREQUIS

- Physique :
  - ✓ Charge électrique
  - ✓ Force de Coulomb
- Mathématique :
  - ✓ Concept de vecteur
  - ✓ Être capable de projeter un vecteur sur un système d'axes

1 Définitions et propriétés

1.1 Définition cavalière

Imaginons la situation suivante : vous êtes dans une salle sans fenêtre, et pour une raison bizarre, vous êtes chargé électriquement (on vous a frotté avec une peau de chat). À l'extérieur de la salle se trouve une grosse boule chargée de signe opposé. Vous ne pouvez pas la voir. Vous ressentez évidemment une force qui vous attire vers la boule, même si vous ne la voyez pas. De votre point de vue, il y a **quelque chose** dans la salle qui fait que vous êtes **attirés** vers l'un des murs, et cette chose est d'autant plus **influente** que vous vous rapprochez du mur (et en fait de la boule).
Pour rendre compte de ce phénomène, on construit le concept de champ électrostatique : un champ électrique est une grandeur, étendue dans l'espace, qui, si l'on y plonge une charge, provoque l'apparition d'une force.

1.2 Définition plus propre

- Soit une particule chargée appelée "**source du champ électrostatique**" : C_0 située en un point O de l'espace, de charge Q.
- Soit une autre particule chargée C_1 située en M de charge q_1.
- On note $r \stackrel{\text{def}}{=} OM$ la distance entre la source et la charge C_1.
- On note $\vec{u}_r \stackrel{\text{def}}{=} \vec{u}_{0\to 1}$ le **vecteur unitaire** allant de la source à C_1.[1]
- Du fait de la présence de la source, la particule C_1 ressent une force :

$$\vec{F}_{0\to 1} = q_1 \times \boldsymbol{\frac{k \cdot Q}{r^2} \vec{u}_r}$$

La partie en gras dépend uniquement de la cause de la force et existe indépendamment de la charge q_1. C'est le champ électrique.

Définition 1.1 — Champ électrostatique.
On appelle *champ électrostatique* créé par la charge Q au point $\vec{r}$ le **vecteur** :

$$\boxed{\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} k\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r}$$

L'unité SI du champ électrique est le volt par mètre ($V.m^{-1}$).

Attention :

1. On notera souvent $\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} r\vec{u}_r$

- Le champ électrostatique n'est pas la même chose qu'une force électrostatique ! Notez bien qu'il n'y a qu'une charge au numérateur (Q). Cela vient du fait que l'on définit le champ électrostatique comme ce qui est créé par une seule charge, et non comme l'influence d'une charge sur une autre.
- Q peut être positif ou négatif, cela changera le sens du vecteur (mais pas sa direction).
- $\vec{E}$ est un vecteur : Il a une **norme** (rend compte d'une influence plus ou moins grande). Et une **direction** (rend compte de la direction de la force qu'il fait naître).
- $\vec{E}$ est une **fonction de l'espace** : Si on change $\vec{r}$, on change *a priori* la norme et la direction de $\vec{E}$.

1.3 Propriétés

Propriétés 1.1 — Force provoquée par un champ.
Une particule chargée de charge q, plongée dans un champ $\vec{E}$ subit une force :

$$\boxed{\vec{F} = q \times \vec{E}}$$

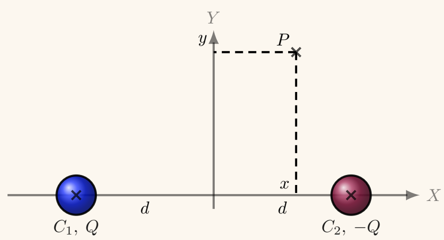
(À vérifier chez vous !)

Propriétés 1.2 — Additivité/Principe de superposition.
Comme les forces électrostatiques s'ajoutent, les champ électrostatiques s'ajoutent s'il existe **plusieurs sources**. Si N particules différentes créent chacune un champ $\vec{E}_i$ au point M, Le champ total $\vec{E}_{tot}$ créé en M vaut :

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots + \vec{E}_N$$

$$\vec{E}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$$

Exercice 1.1 — Champ créé par deux charges ponctuelles.
Soit deux charges ponctuelles : C_1 de charge Q située en $(-d, 0)$ et C_2 de charge $-Q$ située en $(+d, 0)$.
Que vaut le champ électrique $\vec{E}(P)$ en n'importe quel point P, de coordonnées (x, y) (on suppose que l'on connait k et d, et on prendra pour l'exemple $d = 1\ m$, $Q = 10^{-8}\ C$, $x = 1\ m$, $y = 2\ m$) ?



Par principe de superposition : $\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P)$ où :

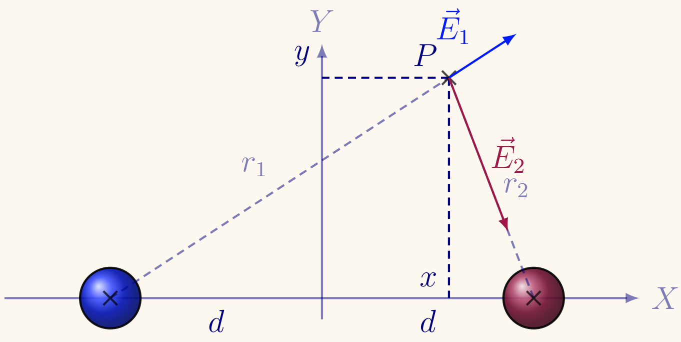
$$\vec{E}_1(P) \overset{\text{def}}{=} kQ\frac{1}{r_1^2}\vec{u}_1$$

$$\vec{E}_2(P) \overset{\text{def}}{=} -kQ\frac{1}{r_2^2}\vec{u}_2$$

avec

$$r_1 \overset{\text{def}}{=} \|\vec{r}_1\| = \sqrt{(d+x)^2+y^2}$$

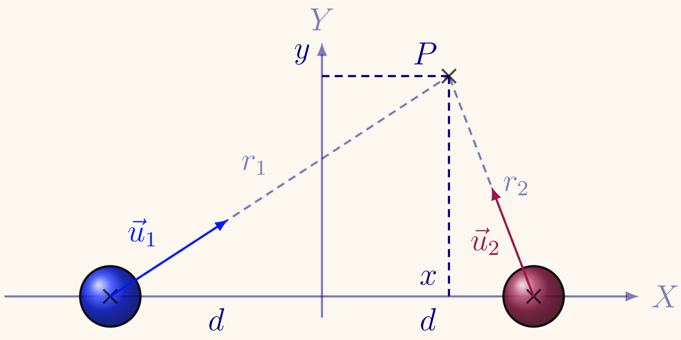
$$r_2 \overset{\text{def}}{=} \|\vec{r}_2\| \sqrt{(-d+x)^2+(y)^2}$$



Les vecteurs unitaires vous ennuient ? On les projette sur les axes cartésiens :

$$\vec{u}_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{1}{r_1}\begin{pmatrix} d+x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{1}{r_2}\begin{pmatrix} -(d-x) \\ y \end{pmatrix}$$



Au final, on trouve l'expression de $\vec{E}(P)$:

$$\boxed{\vec{E}(P) = kQ\left(\frac{1}{r_1^3}\begin{pmatrix} d+x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{r_2^3}\begin{pmatrix} x-d \\ y \end{pmatrix}\right)}$$

Le calcul est bien terminé puisque on connait r_1 et r_2 en fonction de x et y, on peut donc remplacer par les valeurs numériques :

$$\vec{E} \approx \begin{pmatrix} 8 \\ -14.5 \end{pmatrix} \; V.m^{-1}$$

2 Champ créé par une distribution de charge continue

Il est rare d'avoir seulement des charges ponctuelles, distribuées de façon **discrète** dans l'espace. On a plus souvent un système constitué d'un matériau chargé dans son volume, ou bien en surface.
Il reste possible de déterminer le champ créé par un tel système en procédant de façon simple : on "**découpe**" le système en une infinité de minuscules parties, et on considère chacune de ces parties comme une charge ponctuelle. On **somme**[2] l'effet de chacune de ces charges, et voilà.

2.1 Méthode générale

On considère un système $\mathcal{V}$ constitué d'un matériau **chargé**. On suppose que l'on connait la **densité** de charge dans le matériau qui varie selon la position du point $P \in \mathcal{V}$ que l'on

2. Sommer ici signifiera *intégrer*

considère : $\rho(P)$.

- On choisit un point $P \in \mathcal{V}$
- On considère un petit volume $dV \to 0$ situé autour de P
- Comme ce volume tend vers zéro, on peut le considérer comme une **charge ponctuelle**.
- La charge dQ contenue dans ce petit volume est : $dQ = \rho dV$
- Le champ créé au point M quelconque pris dans l'espace un (petit) champ :

$$d\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} k \times \frac{dQ}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

- Le champ total créé au point M sera la somme des champs créés par chacune des petites parties : c'est le **principe de superposition** (voir propriété 1.2).

$$\boxed{\vec{E}_{tot} = \int_{\mathcal{V}} d\vec{E}}$$

$$\vec{E}_{tot}(M) = k \times \int_{\mathcal{V}} \frac{dQ}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

- Le calcul est compliqué de façon générale, puisque l'expression de PM et de $\vec{u}_{PM}$ n'est pas simple *a priori*. Dans les exercices classiques, on se place dans des cas particuliers, où une solution analytique est possible, notamment parce que la géométrie du système admet des symétries qui simplifient les calculs. Sinon, pour trouver $\vec{E}_{tot}$, on prend un ordinateur, et on calcule numériquement le résultat.

2.2 Distribution linéique

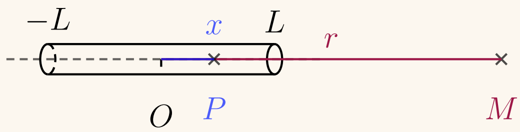
Dans le cas où la distribution est linéique, la densité se note habituellement λ ($C.m^{-1}$). On découpe en petite longueur dl plutôt qu'en petit volume (puisqu'on considère le système sans épaisseur).

$$dQ = \lambda \times dl$$

Le champ total s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{E}_{tot}(M) = k \times \int \frac{\lambda dl}{PM^2}\vec{u}_{PM}}$$

Exercice 2.1 — Bâtonnet uniformément chargé.
On considère un bâtonnet uniformément chargé de densité de charge λ_0 de longueur $2 \times L$.



Déterminer le champ créé dans l'axe du bâtonnet à n'importe quelle distance $r > L$ du centre du bâtonnet.

- On est dans un cas simple où $PM = |r - x|$ et $\vec{u}_{PM} = \vec{u}_x$.
- La densité est uniforme, c'est à dire qu'elle ne dépend pas de la position sur le bâtonnet $\lambda(P) = \lambda_0$. On pourra sortir la densité de l'intégrale !
- On découpe le bâtonnet en petits bouts de longueur $dl = dx$.
- Pour couvrir l'intégralité du bâtonnet, il faut que x varie de $-L$ à L.

Partons du principe de superposition :

$$\vec{E}_{tot} = \int d\vec{E} \qquad \text{où } d\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} k \times \frac{dQ}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

donc, puisqu'ici $dQ = \lambda_0 dl$

$$\vec{E}_{tot} = k \times \int \frac{\lambda_0 dl}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

$$\vec{E}_{tot} = k\lambda_0 \times \int_{-L}^{L} \frac{dx}{(r-x)^2}\vec{u}_x$$

$\vec{u}_x$ est lui aussi indépendant de la position sur le bâtonnet, on peut donc aussi le sortir de l'intégrale :

$$\vec{E}_{tot} = k\lambda_0\vec{u}_x \times \int_{-L}^{L} \frac{dx}{(r-x)^2}$$

Cette intégrale n'est pas dure, on reconnait $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = r - x$ de primitive $1/u$

$$\vec{E}_{tot} = k\lambda_0\vec{u}_x \times \left[\frac{1}{r-x}\right]_{-L}^{L}$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{E}_{tot}(r) = k\lambda_0 \times \frac{2 \times L}{r^2 - L^2}\vec{u}_x}$$

On note que $\lambda_0 \times 2 \times L = Q$ la charge totale du bâtonnet, et si $r \gg L$, on retrouve :

$$\vec{E} = kQ\frac{1}{r^2}\vec{u}_x$$

2.3 Distribution surfacique

Dans le cas où la distribution est surfacique, la densité se note habituellement σ ($C.m^{-2}$). On découpe en petite surface dS.

$$dQ = \sigma \times dS$$

Le champ total s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{E}_{tot}(M) = k \times \iint \frac{\sigma dS}{PM^2}\vec{u}_{PM}}$$

2.4 Distribution volumique

Dans le cas où la distribution est volumique, la densité se note habituellement ρ ($C.m^{-3}$). On découpe en petit volume dV.

$$dQ = \rho \times dV$$

Le champ total s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{E}_{tot}(M) = k \times \iiint \frac{\rho dV}{PM^2}\vec{u}_{PM}}$$

Des exemples seront traités dans le chapitre suivant.