

## Chapitre 8

### Rayonnement dipolaire

Dans ce chapitre, nous étudions la source de rayonnement la plus simple qui soit, le dipôle électrique oscillant. Nous avons vu dans les chapitres précédents que l'existence d'ondes électromagnétiques est inscrite dans les équations de Maxwell. Nous en avons étudié la structure dans le vide puis dans le plasma ionosphérique, comme milieu simple mais nous n'avons rien dit jusqu'ici sur la manière de les créer. Nous allons voir dans ce chapitre que les ondes électromagnétiques sont créées par des charges en accélération. Nous adoptons une démarche relativement théorique : nous définissons un nouvel objet, le potentiel-vecteur dont « dérive » le champ magnétique tout comme le champ électrique dérive du potentiel électrique. Puis, nous obtiendrons le champ électromagnétique rayonné par le dipôle électrique oscillant par manipulation formelle du potentiel-vecteur. Ce faisant, nous perdons quelque peu le sens physique du phénomène. Le champ rayonné comme résultat d'une charge accélérée apparaît comme conséquence « mathématique », en l'occurrence une dérivée d'une fonction composée. Pour le lecteur qui préfère une approche plus physicienne, on se reportera par exemple à :

[https://www.youtube.com/watch?v=f-86bZhxVzY&list=PLUdYlQf0\\_sSdOhQ\\_8jfrAGzbGbj7MXGe&index=15](https://www.youtube.com/watch?v=f-86bZhxVzY&list=PLUdYlQf0_sSdOhQ_8jfrAGzbGbj7MXGe&index=15)

#### 1. Potentiel vecteur

Un des résultats importants de l'électromagnétisme est la nullité de la divergence du champ magnétique (équation de Maxwell-Flux).

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Le rotationnel d'une divergence étant toujours nulle, il doit exister un vecteur, appelé potentiel-vecteur tel que :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Ainsi, le champ magnétique dérive d'un potentiel tout comme le champ électrique dérive du potentiel électrique par  $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$ . Tout comme le potentiel électrique est défini à une constante près, le potentiel-vecteur doit lui aussi être défini à un gradient près puisque  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V = 0$ . On dit que le potentiel-vecteur est défini dans le cadre d'une théorie de jauge, un objet physico-mathématique qui sort largement du cadre de ce cours. Dans le cadre de l'électromagnétisme ou électrodynamique classique, on distingue essentiellement deux jauges : la jauge de Coulomb pour laquelle :

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

et la jauge de Lorentz telle que :

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

La jauge de Lorentz a l'avantage de conduire au fait que potentiel électrique et potentiel-vecteur satisfont aussi à l'équation de d'Alembert. C'est dans le cadre de la jauge de Lorentz que nous continuons les calculs. Nous pouvons commencer par compléter une relation qui était jusqu'ici incomplète. En effet, la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$  ne vaut que pour un champ électrostatique puisqu'en prenant le rotationnel des deux membres, on obtient  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  puisque le rotationnel d'un gradient est toujours nul, ce qui est incompatible avec Maxwell-Faraday. On réécrit Maxwell-Faraday avec le potentiel-vecteur :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ce qui donne pour la composante purement dynamique (champ à géométrie de rotationnel),

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

et en superposant avec le champ électrostatique qui dérive du potentiel électrique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Cette dernière relation est à présent complète. Elle montre comment le champ électrique dérive d'un potentiel électrique et du potentiel-vecteur qui sont ses deux sources.

Dans le vide, en reformulant la nullité de la divergence du champ électrique avec la précédente relation :

$\operatorname{div} \vec{E} = 0 = \operatorname{div} \left( -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{A}) = -\Delta V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$  par utilisation de la jauge de Lorentz. Ainsi :

$$\Delta V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Le potentiel électrique satisfait donc à l'équation de d'Alembert, tout comme les champs électriques et magnétiques. Il reste à voir si le potentiel-vecteur est lui aussi solution de l'équation de d'Alembert. Pour le savoir, on réécrit Maxwell-Ampère, dans le vide, avec le potentiel-vecteur :

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \text{grad}\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \Delta \vec{A} \quad , \text{ soit :}$$

$$\text{grad}\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \Delta \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(-\vec{\text{grad}} V) - \Delta \vec{A} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) - \Delta \vec{A} \quad \text{ou encore,}$$

$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A}$  puis, par élimination du terme commun dans les deux membres,

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Ainsi, le potentiel-vecteur est bien solution de l'équation de d'Alembert dans le cadre de la jauge de Lorentz qui a été construite à cette fin.

Pour conclure sur ce paragraphe, on peut rappeler champ électrique et potentiel créés par une charge électrique au repos.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

De façon analogue, le champ magnétique créé par un élément de courant  $I \vec{dl}$  est donné par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

Le potentiel-vecteur correspondant est ainsi donné par la relation :

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl}}{r}$$

On laisse au lecteur le soin de démontrer que  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  .

## 2. Champs rayonnés au loin

La source de champ est un dipôle électrique oscillant sur l'axe vertical  $Oz$  défini par le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  . Le dipôle est défini par une charge  $-q$  fixe à l'origine et une charge  $+q$  mobile sur l'axe  $Oz$  située à distance  $a = a_0 \cos(\omega t)$  de l'origine. Ainsi, le moment dipolaire du dipôle vaut :

$$\vec{p}(t) = q a_0 \cos(\omega t)$$

Ce dipôle définit un courant  $i(t) = qv = \dot{p}(t)$ . On s'intéresse au potentiel-vecteur vu au point  $M$  situé à la distance  $r$  de l'origine. Le potentiel-vecteur étant solution de l'équation de d'Alembert, il se propage à la vitesse de la lumière. Ainsi, au point  $M$ , il règne le potentiel retardé donné par :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} \quad \text{soit en explicitant le vecteur unitaire :}$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{r} \vec{u}_z$$

Nous allons déterminer le champ magnétique par  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  en coordonnées sphériques rappelées dans la figure ci-dessous :

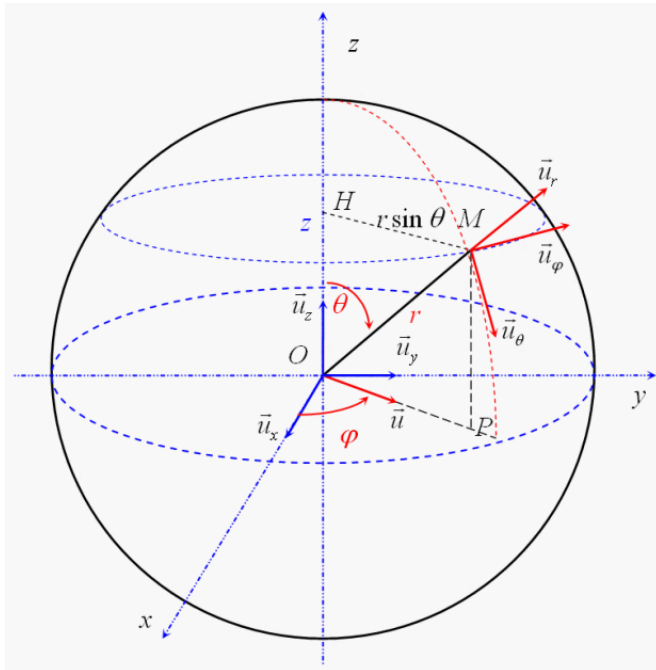


Fig. 8.1 : les coordonnées sphériques (extrait de [http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP\\_C\\_M01\\_G01/co/contenu\\_26.html](http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M01_G01/co/contenu_26.html)). On notera que l'angle  $\theta$  est défini en colatitude.

On projette le potentiel-vecteur sur les deux vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  pour obtenir :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{r} \cos \theta \vec{u}_r - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{r} \sin \theta \vec{u}_\theta + 0 \vec{u}_\phi$$

On peut, à présent, convoquer l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques (en colatitude) :

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi$$

Comme  $A_\phi = 0$  tandis que  $A_r$  et  $A_\theta$  ne dépendent pas de  $\phi$ , il n'y a de composante non nulle que sur  $\vec{u}_\phi$ . On aurait pu anticiper ce résultat. Le potentiel-vecteur est sur l'axe vertical  $Oz$  et le champ magnétique dérive du potentiel-vecteur en géométrie de rotationnel. Ainsi, le champ magnétique doit-il être orthoradial, c'est-à-dire sur  $\vec{u}_\phi$ . Ce résultat est bien confirmé par l'expression en coordonnées sphériques de  $\text{rot } \vec{A}$ . En développant la composante sur  $\vec{u}_\phi$  :

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot } \vec{A}(M, t) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{\mu_0}{4\pi} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{p} \frac{(t - \frac{r}{c})}{r} \cos \theta \right) \right) \vec{u}_\phi$$

Le second terme est en  $\frac{1}{r^2}$ , négligeable devant le premier, en  $\frac{1}{r}$  quand on se place loin de l'origine. Finalement, il reste :

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot } \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{rc} \sin \theta \vec{u}_\phi$$

Ce résultat appelle un commentaire : la dérivée seconde du moment dipolaire, soit  $\ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$  apparaît par dérivation de la fonction composée  $\dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$  qui donne la dérivée seconde multipliée par la dérivée par rapport à  $r$  de  $t - \frac{r}{c}$ , soit  $-\frac{1}{c}$ . C'est donc la charge accélérée dans le dipôle oscillant, par l'intermédiaire de  $\ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)$  qui crée le champ rayonné.

On peut réécrire ce champ magnétique en tant que produit vectoriel par :

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot } \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{rc} \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r \quad \text{ou encore :}$$

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot } \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \wedge \vec{u}_r}{rc}$$

Il reste à présent à déterminer l'expression du champ électrique. Pour ce faire, on utilise Maxwell-Ampère :

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On commence par calculer  $\text{rot } \vec{B}$  puis on intègre le résultat par rapport au temps, tout cela dans l'approximation du champ rayonné au loin. On laisse au lecteur le soin de faire ce calcul laborieux pour obtenir :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left( \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \wedge \vec{u}_r \right) \wedge \vec{u}_r}{rc^2}$$

### 3. Structure de l'onde, diagramme de rayonnement

Les champs électriques et magnétiques sont tels que :

$$\vec{E}(M, t) = c \vec{B}(M, t) \wedge \vec{u}_r, \text{ ou de façon équivalente :}$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{u}_r}{c} \wedge \vec{E}(M, t)$$

Cette dernière relation montre que  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  forment un trièdre direct. Localement, l'onde rayonnée a la structure d'une onde plane même si le dipôle rayonne dans tout l'espace. La figure ci-dessous montre la structure locale en onde plane.

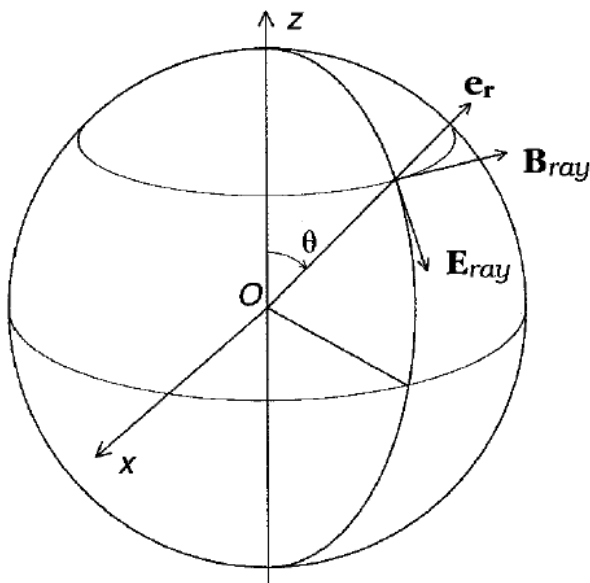


Fig. 8.2 : structure localement en onde plane : et  $\vec{B}$  forment un trièdre direct. Extrait de Spéciale PSI – Cours « Physique des ondes », ondes électromagnétiques dans le vide, Chapitre VI : Rayonnement dipolaire électrique, anonyme.

Il convient à présent de déterminer l'énergie rayonnée par ce dipôle. Nous introduisons le vecteur de Poynting, défini par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Pour mettre en évidence l'intérêt de ce vecteur, il suffit de déterminer sa divergence. On utilise la formule d'analyse vectorielle suivante :

$$\operatorname{div}(\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) = \vec{A}_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{A}_1 - \vec{A}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{A}_2$$

On obtient assez aisément :

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = \operatorname{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{B} \cdot \left( \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = - \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \right) \right)$$

soit,

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = - \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \right) \right)$$

où on reconnaît dans le membre de droite, la dérivée temporelle de la densité d'énergie électromagnétique. L'équation est donc une équation de conservation de l'énergie. Le flux volumique à travers une surface infinitésimale est égal à la variation temporelle d'énergie contenue dans le volume. C'est évidemment une équation locale. Ainsi, le vecteur de Poynting représente-t-il un flux d'énergie.

Dans notre problème de rayonnement dipolaire, en exploitant les expressions des champs électrique et magnétique, on obtient :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\ddot{p}^2 \left( t - \frac{r}{c} \right)}{r^2} \sin^2 \theta \vec{u}_r$$

On voit que le vecteur de Poynting est en  $\sin^2 \theta$ . Sur l'axe vertical, (l'axe du dipôle), le vecteur de Poynting est nul. Le dipôle ne rayonne pas sur son axe. Par ailleurs, le vecteur de Poynting est maximal sur  $\theta=0$ . Le dipôle rayonne au maximum dans le plan perpendiculaire à son axe.

La figure ci-dessous, à droite, montre le diagramme de rayonnement en projection dans le plan  $xOz$ . La figure 8.4 montre le diagramme de rayonnement en 3D et on y voit la symétrie de révolution autour de l'axe du dipôle, qui est un axe de symétrie de la source.

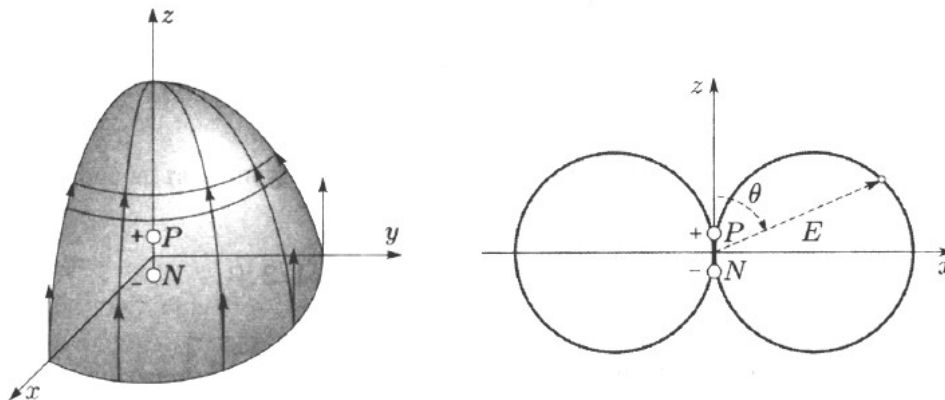


Fig. 8.3 : diagramme de rayonnement en projection dans le plan  $xOz$  . Extrait de Spéciale PSI – Cours « Physique des ondes », ondes électromagnétiques dans le vide, Chapitre VI : Rayonnement dipolaire électrique, anonyme.

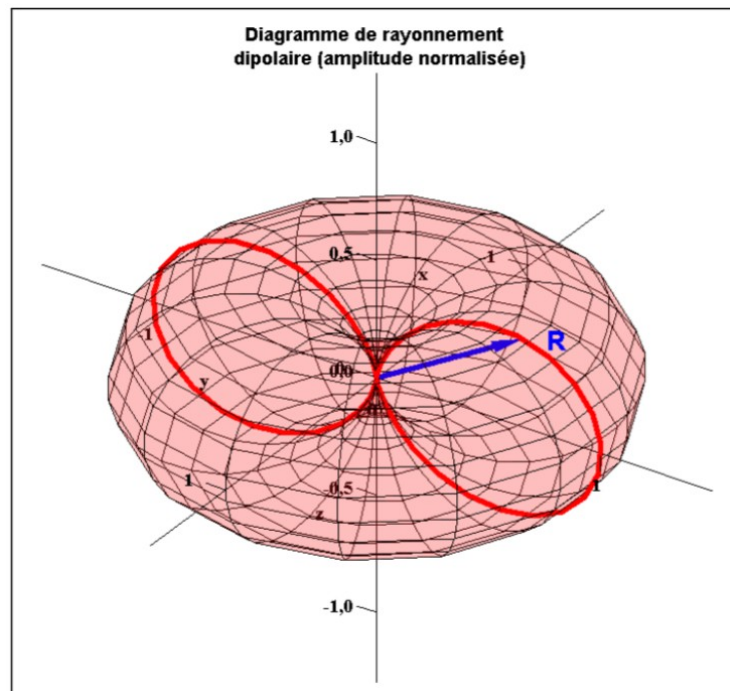


Fig. 8.4 : diagramme de rayonnement en 3D. L'axe du dipôle étant un axe de symétrie de la source de rayonnement, l'énergie admet l'axe du dipôle comme axe de symétrie de révolution. Le dipôle ne rayonne pas du tout sur son axe et le rayonnement est maximal dans le plan perpendiculaire au dipôle qui passe par le centre de gravité du dipôle. Extrait de Chapitre XVIII Rayonnement d'un dipôle oscillant, anonyme, [mp3montaignebdx.legtux.org/](http://mp3montaignebdx.legtux.org/).

#### 4. Diffusion de Rayleigh, pourquoi le ciel est-il bleu ?

Pour finir ce chapitre, nous évoquons, sur un plan plutôt qualitatif, la diffusion de Rayleigh qui explique pourquoi le ciel est bleu. On peut observer ce phénomène notamment dans la fumée de cigarette qui, en fonction des conditions d'éclairage, peut



être bleutée ou encore, la lumière diffusée à travers du lait dilué, qui apparaît aussi bleutée comme dans le cliché ci-dessous :

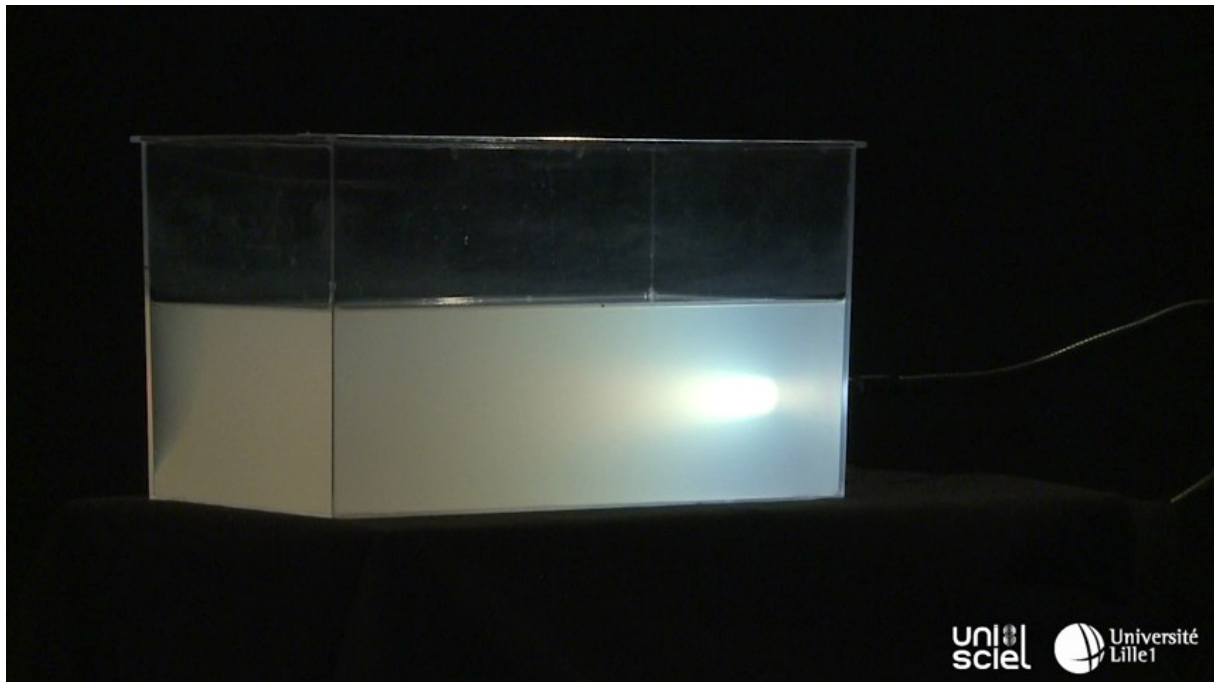


Fig. 8.5 : lumière bleutée à droite, par diffusion de Rayleigh. Source Unisciel.

L'explication est la suivante : les particules en suspension dans l'atmosphère, la fumée de cigarette ou le lait dilué dans l'eau sont des molécules qui n'absorbent pas l'onde électromagnétique polychromatique qui les traverse. Ainsi, les nuages d'électrons sont excités par le champ électrique de l'onde et ils se mettent à osciller. Ils se comportent donc comme des dipôles électriques qui réémettent selon la théorie que nous venons de voir dans ce chapitre. Si nous notons la vibration du moment dipolaire comme suit :

$$p(t) = q a_0 \cos(\omega t)$$

avec  $\omega$  qui prend toutes les valeurs sur le spectre visible (source blanche), alors le champ rayonné par ces nuages d'électrons est tel que :

$$\ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right) = q^2 a_0^2 \omega^4 \cos^2\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

et, par conséquent, le vecteur de Poynting associé,

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} \sin^2 \theta \vec{u}_r$$

L'énergie rayonnée par la matière en suspension est en  $\omega^4$ . Comme le bleu correspond aux hautes fréquences du spectre, la lumière réémise par la matière en suspension est donc beaucoup plus intense dans les fréquences élevées ou autrement dit, les longueurs

d'onde courtes. Le spectre de la lumière blanche incidente est ainsi fortement déplacé et intensifié vers le bleu, d'où la couleur perçue par l'observateur.