Chapitre 7

Ondes électromagnétiques dans un plasma

Dans ce chapitre, nous introduisons la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu. Nous nous intéressons ici à un milieu peu ordinaire, un plasma. Un plasma est un milieu composé d'atomes ou de molécules partiellement ou complètement ionisés. La charge globale est nulle puisqu'il y a dans la matière autant de protons que d'électrons. En revanche, les particules sont, dans une certaine mesure, capables de se déplacer. Ainsi, nous aurons dans le plasma, une charge électrique nulle, au moins à l'échelle mésoscopique mais des densités de courant, non nulles. L'échelle mésoscopique est une échelle intermédiaire entre échelle microscopique, c'est-à-dire l'échelle des constituants élémentaires de la matière ordinaire. Quand on est à cette échelle microscopique, la matière est discontinue, si le volume infinitésimal est de l'ordre de grandeur du noyau, alors, localement ρ peut être non nulle pour de la matière globalement neutre. A l'échelle dite mésoscopique, on considère que le volume infinitésimal enferme un nombre de charges suffisant pour qu'il y ait compensation statistique des charges positives et négatives. On distingue les plasmas froids (les températures restent inférieures à $10^5 K$) des plasmas chauds ($T>10^5 K$). Le coeur des étoiles est ainsi un plasma très chaud et très dense.
Le plasma dans lequel nous nous plaçons est un plasma froid, savoir l'ionosphère, une couche de l'atmosphère haute typiquement entre 80 et 250 km d'altitude. A ces altitudes, la matière est ionisée par les rayonnements cosmiques et le vent solaire.
Ce chapitre a aussi un intérêt sur le plan de l'histoire des sciences et des techniques parce que les éléments étudiés sont relatifs à une expérience historique. Il s'agit de la première liaison radioélectrique transatlantique réussie par Guglielmo Marconi entre Saint-Jean de Terre-Neuve (Canada) et Poldhu dans le sud du comté des Cornouailles en Angleterre, ce qui lui valut le prix Nobel en 1909, partagé avec Karl Ferdinand Braun.
Nous allons expliquer dans ce chapitre pourquoi cette liaison était possible, ce qui semble paradoxal en raison de la rotondité de la Terre.

1. Densité de courant dans le plasma

Il convient de faire un certain nombre d'hypothèses. Nous considérons que le plasma est composé d'électrons et d'ions (peu importe lesquels précisément) de charges respectives $-e$ et $+e$, tous deux en densité volumique N . Comme les densités des deux espèces de porteurs de charges sont identiques et les charges égales et opposées, la densité totale est nulle à l'échelle mésoscopique à laquelle nous nous plaçons.
Par ailleurs, nous négligeons la gravité devant les forces électromagnétiques (cette hypothèse est très classique) et nous faisons l'hypothèse que les particules sont non relativistes ce qui est très raisonnable puisque les intensités des champs vont rester relativement modestes.
On émet depuis la surface de la Terre une onde plane progressive monochromatique polarisée rectiligne (OPPMPR) qui tombe sur le plasma et y pénètre. D'un point de vue qualitatif, les porteurs de charges subissent les forces électromagnétiques générées par les deux champs de l'onde et les particules se mettent en mouvement, d'où une densité

de courant globale. Dans les quatre équations de Maxwell dans le plasma, Maxwell-Ampère ets donc modifiée par une densité de courant non nulle mais Maxwell-Gauss reste inchangée puisque la matière est globalement neutre. L'objectif de tout ce chapitre est d'étudier en quoi l'OPPMPR est modifiée dans sa structure quand elle se propage dans le plasma.
Pour déterminer la densité de courant totale dans le plasma, il faut résoudre les équations mécaniques des deux espèces de porteurs. Il s'agit donc d'écrire et de résoudre le principe fondamental de la dynamique pour chaque espèce.

Les particules subissent :

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\wedge\vec{B})$$

où $\vec{E},\vec{B}$ sont les champs issus de l'onde et $q,\vec{v}$ respectivement la charge et la vitesse de la particule qui subit la force. Moyennant une petite analyse, on peut mettre en évidence que seule la force de Coulomb est à prendre en compte, la force magnétique étant négligeable devant la force de Coulomb. En effet, si on réécrit les deux forces, électrique et magnétique, en normes :

$$F_e=|q|E \quad \text{et} \quad F_m\leqslant|q|vB$$

ainsi, $\frac{F_m}{F_e}\leqslant\frac{vB}{E}$ or, $B=\frac{E}{c}$ pour une OPPMPR, donc finalement, $\frac{F_m}{F_e}\leqslant\frac{v}{c}$.

Comme les particules sont non relativistes, le rapport est très petit devant 1 et on peut limiter l'étude à la seule force de Coulomb.

Le champ électrique est celui d'une onde OPPMPR et s'écrit donc :

$$\vec{E}=\vec{E}_O e^{i(\omega t-\vec{k}.\vec{r})}$$

Il s'agit donc d'écrire et de résoudre le principe fondamental de la dynamique pour l'électron et l'ion qui subissent la seule force de Coulomb. Ainsi,

$$m\ddot{\vec{r}}_e=-e\vec{E}$$

$$M\ddot{\vec{r}}_i=+e\vec{E}$$

où m,M sont respectivement les masses de l'électron et de l'ion, $\vec{r}_e,\vec{r}_i$ respectivement les vecteurs position de l'électron et de l'ion.
Quand l'onde pénètre dans le plasma, les particules répondent par un régime transitoire dont on peut penser qu'il s'éteint rapidement. On cherche donc la solution du principe fondamental de la dynamique sous forme de régime permanent dans lequel les particules vibrent avec la même pulsation que le champ excitateur et avec, a priori, un déphasage. Ainsi,

$$\vec{r}=\vec{r}_O e^{i(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\phi)}$$

Dès lors, en dérivant une première fois,

$$\dot{\vec{r}}=i\,\omega\,\vec{r}_O\,e^{i(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\phi)}$$

puis, une seconde fois,

$$\ddot{\vec{r}}=-\omega^2\,\vec{r}_O\,e^{i(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\phi)}$$

ce qui donne, pour l'électron :

$$m\,\omega^2\,\vec{r}_e=+e\,\vec{E}$$

et pour l'ion :

$$M\,\omega^2\,\vec{r}_i=-e\,\vec{E}$$

Comme le vecteur densité de courant est donné pour chaque espèce par $\vec{j}=Nq\vec{v}$ (cf. Chapitre 1), il faut déterminer les vitesses et sommer les deux contributions apportées par chacune des espèces.

$$\vec{v}_e=\frac{i\,e}{m\,\omega^2}\vec{E}$$

$$\vec{v}_i=\frac{-i\,e}{M\,\omega^2}\vec{E}$$

Les deux vitesses ne diffèrent au signe près, que par la masse des particules. Or, les ions sont nettement plus massifs que les électrons. L'ion le plus léger est l'ion hydrogène qui pèse presque 2000 fois plus que l'électron. En fait, les ions sont lourds et le champ électrique ne les met que peu en mouvement par rapport au mouvement des électrons. Dans la densité de courant totale, somme des deux densités individuelles, on ne retient que la contribution de l'électron. Ainsi,

$$\vec{j}=N(-e)\,\vec{v}_e+N(+e)\,\vec{v}_i\approx\frac{-N\,i\,e^2}{m\,\omega}\vec{E}$$

2. Résolution des équations de Maxwell dans le plasma, relation de dispersion

Nous pouvons à présent écrire les équations de Maxwell dans le plasma. Seule, Maxwell-Ampère est modifiée. Il faut donc la commenter de manière à donner un argument sur la suite du calcul, par comparaison avec la propagation de l'onde dans le vide. Les deux divergences sont nulles comme dans le vide. La densité de courant étant proportionnelle au champ électrique, on constate dans Maxwell-Ampère que le champ magnétique est à géométrie de rotationnel, créé par le champ électrique par l'intermédiaire de sa dérivée d'ordre 0 (la contribution de la densité de courant) et d'ordre 1. Comme l'onde qui pénètre dans le plasma est polarisée rectiligne, le champ électrique et sa dérivée d'ordre

1, aussi. La somme des deux sources reste trigonométrique, polarisée rectiligne. Le champ magnétique créé par Maxwell-Ampère reste donc orthoradial comme dans le vide. Au terme de cette analyse qualitative, on perçoit que la structure géométrique de l'onde n'est pas modifiée par rapport à la propagation dans le vide. Ce résultat est basé sur le fait que les deux divergences sont nulles comme dans le vide et aussi sur le fait que , comme la densité de courant est proportionnelle au champ électrique, l'équation de Maxwell-Ampère conduit à la même géométrie que dans le vide.

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=0$$
$$\mathrm{div}\,\vec{B}=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,E=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,B=-\frac{\mu_0 N i e^2}{m\omega}\vec{E}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Nous pouvons donc réécrire les quatre équations avec l'équivalence $\vec{\nabla}\Leftrightarrow -j\vec{k}$

$$\vec{k}.\vec{E}=0$$

$$\vec{k}.\vec{B}=0$$

$$\vec{k}\wedge\vec{E}=\omega\vec{B}$$

$$\vec{k}\wedge\vec{B}=\left(\frac{\mu_0 N e^2}{m\omega}-\frac{\omega}{c^2}\right)\vec{E}$$

Quand on introduit $\vec{k}\wedge\vec{E}=\omega\vec{B}$ dans Maxwell-Ampère, on obtient :

$\frac{k^2}{w}\vec{E}=\left(\frac{\omega}{c^2}-\frac{\mu_0 N e^2}{m\omega}\right)\vec{E}$ ce qui conduit, par simplification du champ électrique, à :

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\mu_0 N e^2}{m}=\frac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2}$$

qu'on appelle relation de dispersion dans le plasma.

Si on pose $\omega_c^2=\frac{\mu_0 N e^2 c^2}{m}$ appelé pulsation caractéristique du plasma. Cette pulsation ne dépend en effet que de la nature du plasma par l'intermédiaire de sa densité, de la charge et de la masse des porteurs de charge (ici, les électrons) et bien sûr, de constantes fondamentales.
Du point de vue numérique, avec les valeurs suivantes :
$\mu_0=4\pi 10^{-7}SI\,,N=5.10^9 m^{-3}\,,e=1{,}6.10^{-19}C\,,c=3.10^8 m.s^{-1}\,,m=9{,}1.10^{-31}kg$, on trouve :
$\omega_c=4{,}0.10^6 rad.s^{-1}$, soit une fréquence caractéristique, $f_c=635{,}0\,KHz$.

3. Propagation dans le plasma

Il reste à interpréter cette relation de dispersion et pulsation ou fréquence caractéristique du point de vue de la capacité des ondes à se propager dans le plasma. Il convient de considérer deux cas.

a. La pulsation de l'onde est supérieure à la pulsation caractéristique du plasma, soit $\omega > \omega_c$. Dans ce cas, k^2 est positif et k est réel bien que plus faible que dans le vide.

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$$

Toutefois, l'onde se propage sans atténuation avec la vitesse de phase, fonction de la pulsation :

$$v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

L'indice de réfraction vaut alors :

$$n = \frac{c}{v_\phi} = \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

Les deux dernières relations appellent un commentaire important. On constate que la vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière et l'indice inférieur à 1. On pourrait penser que ce résultat viole la relativité qui affirme que rien ne se déplace plus vite que la lumière. En fait, les résultats sont corrects. La vitesse de phase ne correspond pas à une vitesse de déplacement d'une quelconque énergie. Le fait qu'elle soit supérieure à la vitesse de la lumière ne vient donc pas en contradiction de la relativité même si le résultat n'est pas intuitif. Nous verrons dans le paragraphe suivant, une conséquence importante de ces résultats.

b. La pulsation de l'onde est inférieure à la pulsation caractéristique du plasma, soit $\omega < \omega_c$. Dans ce cas, k^2 est négatif et k est imaginaire pur.

$$k = -i\frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c}$$

On peut poser $k = -i\alpha$ et en introduisant dans l'expression du champ électrique, on obtient, si on suppose une propagation verticale, donc selon l'axe Oz (pour simplifier l'écriture) de l'onde depuis la surface de la Terre :

$$\vec{E} = \vec{E}_O e^{i\omega t} e^{-\alpha z}$$

L'onde dans le plasma est stationnaire et évanescente, elle s'atténue dans la direction de propagation en raison du terme $e^{-\alpha z}$. Rapidement (en fonction de la valeur de α), l'énergie de l'onde se dissipe dans le plasma. La propagation sur de longues distances n'est pas possible.

4. Expérience de Marconi

Le 12 décembre 1901, Guglielmo Marconi établit la première liaison radioélectrique transatlantique entre l'Angleterre et Terre-Neuve. Comme les ondes électromagnétiques se propagent en ligne droite dans un milieu homogène, pour expliquer comment l'onde a contourné la rotondité ou sphéricité de la Terre, Heaviside et Kennelly ont postulé l'existence de couches réfléchissantes en altitude. Les calculs des paragraphes précédents suggèrent comment ça se passe dans un modèle de couches parallèles (localement au moins puisque l'atmosphère est aussi de géométrie sphérique). La densité dépend de l'altitude pour des questions thermodynamiques, entre autres et on peut montrer (nous admettrons) que l'indice de réfraction diminue avec l'altitude. Dans le modèle en couches illustrée dans la figure ci-dessous, l'onde OPPMPR qui arrive depuis la surface du sol, pénètre donc dans des couches moins réfringentes. Ainsi, à chaque dioptre, le rayon s'éloigne de la normale jusqu'à obtenir la condition de réflexion totale. Dans la deuxième partie de la figure (à gauche), les rayons descendent et pénètrent à présent dans des milieux plus réfringents, et par voie de conséquence, les rayons s'éloignent de la normale. Même en se contentant d'une analyse qualitative, on comprend que, globalement, le rayon est courbé par l'ionosphère et est globalement réfléchi.

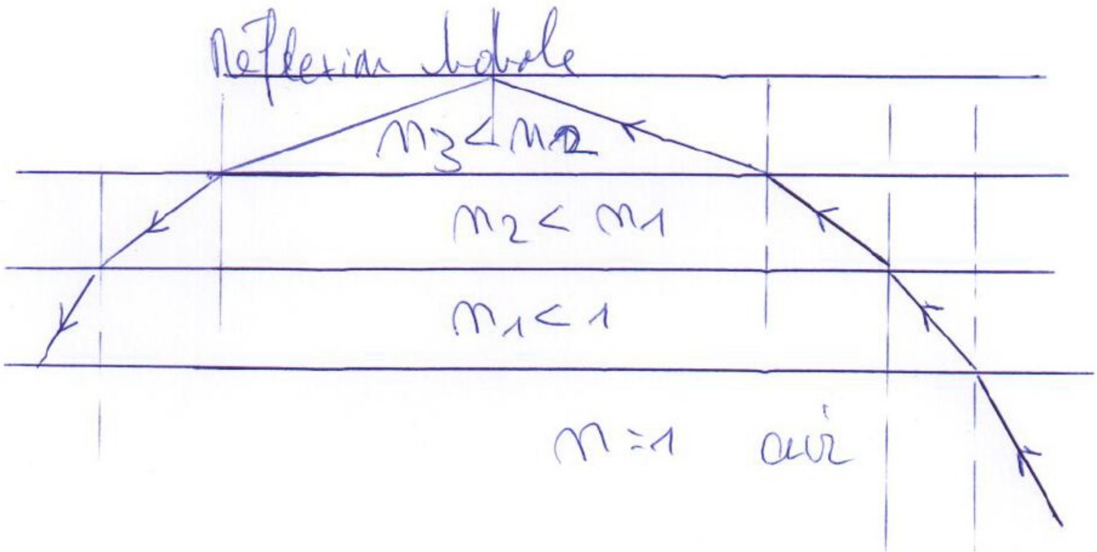

Fig. 7.1 : propagation dans l'ionosphère modélisé comme succession de couches d'indices optiques décroissants. Les rayons s'écartent de la normale jusqu'à réflexion totale et « rebroussent » chemin.