Chapitre 6

Ondes électromagnétiques dans le vide

1. Equation de d'Alembert

Nous nous plaçons dans le vide strict. La densité de charges est nulle ainsi que la densité de courant. Dans ce contexte, les deux divergences sont nulles, il n'y a aucun champ à géométrie de divergence. On peut voir le phénomène ondulatoire selon deux angles : l'angle purement théorique au sens de la manipulation symbolique des équations qui fait émerger l'équation de d'Alembert, l'équation fondamentale de la physique ondulatoire. Nous sommes à nouveau dans le champ de la physique théorique.

1.1. Manipulation formelle

La manipulation formelle fait apparaître un objet nouveau, en l'occurence les ondes électromagnétiques qui se propagent dans le vide. A la fin du dix-neuvième siècle, il y avait débat sur le milieu de propagation. Il était alors difficile de concevoir une onde qui se propage dans le vide pur. On a baptisé « éther » cet hypothétique milieu qu'on a longtemps cherché avant de se rendre compte que la propagation dans le vide pur ou strict est bien possible. On recommande au lecteur de lire l'histoire mouvementé autour de l' « éther » parce que la recherche de cette époque a préparé les esprits pour la rupture introduite par Albert Einstein en 1905 avec la relativité restreinte.

Les 4 équations de Maxwell s'écrivent dans ce contexte :

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=0$$
$$\mathrm{div}\,\vec{B}=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\,E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\,B}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

La manipulation formelle consiste à prendre le rotationnel du rotationnel de l'un quelconque des deux champs. Les calculs débouchent dans les deux cas sur la même équation. Nous allons le faire sur le champ électrique et le lecteur vérifiera à titre d'exercice qu'on obtient le même résultat sur le champ magnétique.

$$\mathrm{rot}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}\,E}\right)=-\mathrm{rot}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial\,\mathrm{rot}\,\vec{B}}{\partial t}=-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

On a échangé l'opérateur spatial et la dérivée temporelle comme on en est maintenant familier. Ensuite, on utilise une identité d'analyse vectorielle et on utilise le fait que la divergence du champ électrique est nulle. L'identité fait apparaître le Laplacien du champ électrique.

$$\mathrm{rot}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}\, E}\right)=\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}\right)-\Delta\vec{E}=-\Delta\vec{E}$$

On obtient l'équation de d'Alembert du champ électrique qui montre l'égalité, à une constante près, du Laplacien du champ et de sa dérivée temporelle d'ordre 2.

$$\Delta\vec{E}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Comme il s'agit de déterminer le Laplacien vectoriel, en l'occurence du champ électrique, il faut d'abord définir le Laplacien scalaire. La définition intrinsèque du Laplacien scalaire est donnée par la divergence du gradient du champ scalaire. En tant qu'opérateur combiné de deux opérateurs du premier ordre (divergence et gradient), il n'est pas évident de lui donner une signification physique. On se contente d'en donner la formule opérationnelle en coordonnées cartésiennes appliquée sur le potentiel électrique.

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Un champ vectoriel est décrit par trois composantes qui peuvent être comprises comme autant de champs scalaires sur les trois axes. Le Laplacien vectorielle st alors donné de manière opérationnelle par le Laplacien appliqué sur chacune des composantes.

$$\vec{E}=\begin{pmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\Delta\vec{E}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\\\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\\\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\end{pmatrix}$$

1.2. Interprétation qualitative

L'inconvénient de la manipulation formelle est qu'elle escamote le phénomène physique qui est à l'origine du caractère ondulatoire des champs électriques et magnétiques. Dans ce paragraphe, nous allons mettre en évidence ce phénomène sans manipulation calculatoire des équations, mais juste par interprétation physique de ce qu'elles suggèrent sur les propriétés des champs. Le phénomène est basé sur le couplage des deux rotationnels qu'on rappelle :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Nous faisons l'hypothèse que quelque part dans l'univers, il y a un point de l'espace, siège d'un champ électrique variable, par exemple selon une vibration sinusoïdale. Selon Maxwell-Ampère, ce champ électrique variable est la source d'un champ magnétique à géométrie de rotationnel (lui aussi sinusoïdal puisque la dérivée temporelle d'un champ sinusoïdal est encore sinusoïdal), soit avec localement des lignes de champs circulaires et la géométrie orthoradiale comme suggéré sur le schéma 6.1 dans lequel ce phénomène est localisé à gauche. Ce champ magnétique, effet de la source locale décroit rapidement quand on s'éloigne. Par Maxwell-Faraday, ce champ magnétique devient à son tour source d'un champ électrique à géométrie orthoradiale de rotationnel, champ toujours sinusoïdal, la dérivée temporelle d'un sinus étant sinusoïdal à n'importe quel ordre de dérivation. Et ainsi, de proche en proche. Le phénomène ondulatoire est basé sur le fait qu'une source génère un effet qui devient à son tour source par le rotationnel couplé qui génère encore un effet qui redevient source, ad vitam æternam. Le phénomène est illustré en figure 6.1, ci-dessous.

À compléter (voir vidéo)

Fig. 6.1 : Propagation de la perturbation par couplage source – effet par le biais des deux rotationnels. On a représenté ici, la propagation de gauche à droite sur l'axe horizontal mais en réalité, l'onde se propage dans tout plan perpendiculaire à la direction du champ électrique variable à l'origine du phénomène.

Il faut insister sur le fait que les 4 équations de Maxwell contiennent en germe la propagation dans le vide. Ce phénomène ne s'appuie pas sur une déformation de la matière, puisque les équations de Maxwell sont décrites ici dans le vide. Il a fallu du temps à la communauté des physiciens pour accepter ce résultat, à l'époque, contre-intuitif. C'est un bel exemple de pensée disruptive qui consiste à renoncer à une idée arrêtée selon laquelle, une onde a besoin d'un milieu pour se propager.

Insistons encore sur la complémentarité des deux approches, formelle théorique et qualitative. L'approche mathématique est indispensable pour développer les relations quantitatives. Mais, sans interprétation physique, on risque de manipuler des équations formelles dont on ne sait plus, à la fin, ce qu'elles représentent. C'est une des difficultés de la physique théorique actuelle. En physique quantique, il devient dans la pratique, impossible de donner des interprétations intelligibles. Il faut s'en remettre uniquement à la manipulation formelle qui fait apparaître des objets nouveaux : les ondes gravitationnelles récemment, le boson de Higgs, etc. Seule une élite de spécialistes rompus à cette virtuosité des calculs accède à cette physique moderne et actuelle.

2. Résolution en onde plane progressive monochromatique polarisée rectiligne

La résolution de l'équation de d'Alembert telle que nous l'avons établie dans le paragraphe 1 est trop complexe. En réalité, il y a 3 équations (les 3 composantes du champ électrique) et dans chaque équation, le membre de droite est constitué des 3 dérivées partielles du champ électrique par rapport aux 3 variables d'espace. Il faut donc simplifier. Nous allons pour ce faire, poser quelques hypothèses qui vont simplifier l'équation universelle de façon très conséquente. Nous expliquons chaque hypothèse pour parvenir, pas à pas, à l'équation de d'Alembert simplifiée.

2.1. Onde polarisée rectiligne

Nous faisons l'hypothèse qu'au cours de la propagation, le champ électrique conserve une direction fixe, soit Oz . Les composantes sur les deux autres axes sont alors nulles. On peut écrire le champ électrique comme :

$$\vec{E}=\begin{pmatrix}0\\0\\E\end{pmatrix}$$

On a ainsi déjà considérablement simplifié puisque le problème est passé de vectoriel à scalaire.

2.2. Onde plane

La simplification suivante consiste à dire formellement que la seule composante non nulle du champ électrique ne dépend spatialement que d'une composante, soit x . Cela revient à dire que les surfaces d'onde, à savoir le lieu des points équiphase à t constant, sont des plans, perpendiculaires à la direction de propagation, qui est Ox . Dans cette hypothèse, les dérivées spatiales sont nulles, sauf celle par rapport à x . L'équation de d'Alembert est à présent devenu :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

On constate qu'on est ramené à une onde scalaire monodimensionnelle, comme, par exemple, la perturbation transversale qui se propage le long d'une corde de Melde.

2.3. Résolution en onde progressive monochromatique (ou harmonique)

La résolution en onde monochromatique (ou harmonique) progressive est classique. ON écrit, de façon générale avec un terme de phase qu'on peut toujours mettre à 0 en choisissant l'origine des temps et d'espace de façon adéquate. Le signe $\pm kx$ correspond à une propagation de l'onde dans les sens des x croissants (signe négatif) ou décroissant (signe positif). Le caractère progressif correspond au fait que les variables temporelles et spatiales se combinent dans la même fonction sinusoïdale.

$$E=E_0\cos(\omega t\pm kx+\phi)$$

Dans la suite, on s'intéresse à une onde qui se propage dans le sens des x croissants, d'où :

$$E=E_0\cos(\omega t-kx+\phi)$$

Il reste à voir pour quelles conditions sur ω et k , cette expression de champ électrique ondulatoire satisfait à l'équation de d'Alembert scalaire. Pour ce faire, on dérive deux fois par rapport au temps et deux fois par rapport à la variable d'espace et on égale les deux membres de l'équation de d'Alembert. On obtient :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=-k^2 E_0\cos(\omega t-kx+\phi)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=-\frac{w^2}{c^2}E_0\cos(\omega t-kx+\phi)$$

L'équation de d'Alembert est satisfaite si : $k^2=\frac{w^2}{c^2}$ ce qui est une reformulation de :

$$\lambda=c\,.T$$

puisque $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ et $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

Maintenant que dans les hypothèses, le champ électrique est clair, il s'agit de déterminer le champ magnétique. Pour ce faire, on utilise Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,E=\nabla\wedge\vec{E}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\E_0\cos(\omega t-kx)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-k\,E_0\sin(\omega t-kx)\\0\end{pmatrix}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

On obtient le champ magnétique par intégration temporelle. On ne considère pas les constantes d'intégration (par rapport au temps) parce qu'elles correspondent à l'expression d'un champ statique pas forcément uniforme parce que ces constantes d'intégration sont constantes par rapport au temps mais peuvent dépendre des variables d'espace.

$$\vec{B}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{E_0}{c}\cos(\omega t-kx)\\0\end{pmatrix}$$

On constate que l'amplitude du champ magnétique est égale à celle du champ électrique divisée par la vitesse de la lumière.

3. Structure géométrique de l'onde

3.1. Reformulation des équations de Maxwell dans le contexte

Avant de conclure sur la structure géométrique de l'onde électromagnétique, nous allons généraliser ce résultat quand l'onde se propage sur une direction donnée par le vecteur d'onde défini par $\vec{k}=k\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire sur l'axe de propagation qui ne coÏncide plus forcément avec l'un des trois axes du repère standard. Dans ce cas, bien que l'onde soit toujours polarisée, il faut renoncer à une seule composante non nulle et on doit écrire :

$$\vec{E}=\begin{pmatrix} E_{0x}e^{j(\omega t-\vec{k}.\vec{r})} \\ E_{0y}e^{j(\omega t-\vec{k}.\vec{r})} \\ E_{0y}e^{j(\omega t-\vec{k}.\vec{r})} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{0x}e^{j[\omega t-(k_x x+k_y y+k_z z)]} \\ E_{0y}e^{j[\omega t-(k_x x+k_y y+k_z z)]} \\ E_{0z}e^{j[\omega t-(k_x x+k_y y+k_z z)]} \end{pmatrix}$$

où E_{0x} , E_{0y} et E_{0z} sont des constantes et le vecteur $\vec{k}$ est donné par ses 3 composantes :

$$\vec{k}=\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

et $\vec{r}$ est le vecteur position.

Il s'agit dans ce qui suit de reformuler les deux divergences et les deux rotationnels des champs électriques et magnétiques avec les expressions des champs en ondes progressives des lignes qui précèdent. On rappelle, qu'en coordonnées cartésiennes, la divergence s'écrit :

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$ qui se réécrit avec les hypothèses du contexte :

$$\operatorname{div}\vec{E}=(-jk_x)E_{0x}e^{j[\omega t-(k_x x+k_y y+k_z z)]}+(-jk_y)E_{0y}e^{j[\omega t-(k_x x+k_y y+k_z z)]}+(-jk_z)E_{0z}e^{j[\omega t-(k_x x+k_y y+k_z z)]}$$

En regardant attentivement l'expression précédente, on constate que :

$$\operatorname{div}\vec{E}=-j\vec{k}.\vec{E}$$

Il vient immédiatement :

$$\operatorname{div}\vec{B}=-j\vec{k}.\vec{B}$$

Enfin les reformulations des deux rotationnels donnent de façon analogue (on conseille au lecteur de le démontrer) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -j\vec{k} \wedge \vec{E}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = -j\vec{k} \wedge \vec{B}$$

On peut maintenant réécrire les 4 équations de Maxwell avec les membres des sources, dans le contexte de la propagation dans le vide :

$$\vec{k}.\vec{E} = 0$$

$$\vec{k}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{c^2}\vec{E}$$

En particulier, $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B}$ met en évidence que $\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un trièdre direct.

3.2. Structure géométrique de l'onde

L'onde est représentée en figure 6.2, ci-dessous qui correspond à un cliché ou « instantanée ». Le temps est figé, on voit sur la figure uniquement la dépendance spatiale. Les champs électriques et magnétiques sont synchrones en ce sens qu'ils sont maximum, nuls et minimum en même temps. On trouve sur Internet de nombreuses animations qui mettent en évidence la dépendance temporelle. Les champs $\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un trièdre direct selon

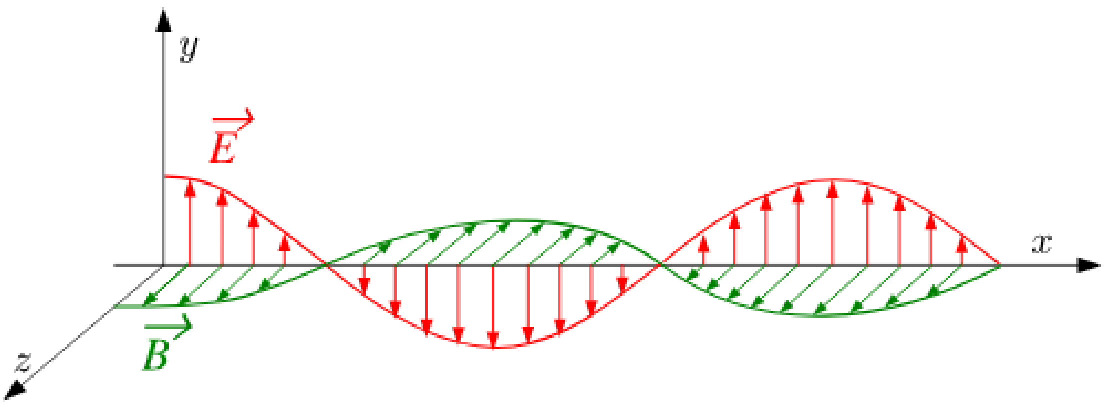

Fig. 6.2 : structure géométrique de l'onde. Ox est la direction de propagation, ici, le champ électrique est polarisé sur Oy et le champ magnétique est sur l'axe Oz .