

Chapitre 5

Induction électromagnétique

1. Rails de Laplace

Dans ce paragraphe, nous faisons un rappel succinct du phénomène d'induction électromagnétique dans un circuit macroscopique, en l'occurrence, les rails de Laplace. L'idée est de parvenir à la loi de Faraday sous forme intégrale de manière à ce que nous puissions rapidement la reformuler dans sa version locale. Ainsi, nous obtiendrons la dernière équation de Maxwell, dite équation de Maxwell-Faraday. Nous insistons toutefois sur le fait que c'est un rappel rapide et non un cours complet sur l'induction électromagnétique. En toute rigueur, il faudrait distinguer induction de Lorentz dans laquelle un circuit se déforme ou se déplace dans un champ magnétique uniforme, de l'induction de Neumann dans laquelle le circuit induit est fixe et le champ magnétique variable. Ainsi formulé, l'expérience des rails de Laplace est un exemple emblématique d'induction de Lorentz. On objectera que pour un tel phénomène, la question du déplacement peut être délicate puisque le déplacement est relatif à un référentiel. Si on convoque la relativité restreinte, on s'aperçoit que le champ magnétique est une reformulation de la force de Coulomb par transformation relativiste décrite par la transformation de Lorentz. Comme dans ce cours d'Electromagnétisme, il n'est pas possible d'incorporer la relativité restreinte, il faut se contenter des descriptions classiques. C'est la raison pour laquelle, nous n'insistons pas sur le phénomène macroscopique.

Dans l'expérience des rails de Laplace, une barre conductrice métallique se déplace sur un rail en U, fixe dans le référentiel du laboratoire selon la figure 5.1 ci-dessous. Le rail fixe est plongé dans un champ magnétique uniforme, normal au plan défini par le rail fixe. On ne se préoccupe pas du dispositif qui crée ce champ magnétique appelé champ inducteur. La barre mobile est tractée par un opérateur extérieur à vitesse constante v selon la géométrie de la figure 5.1.

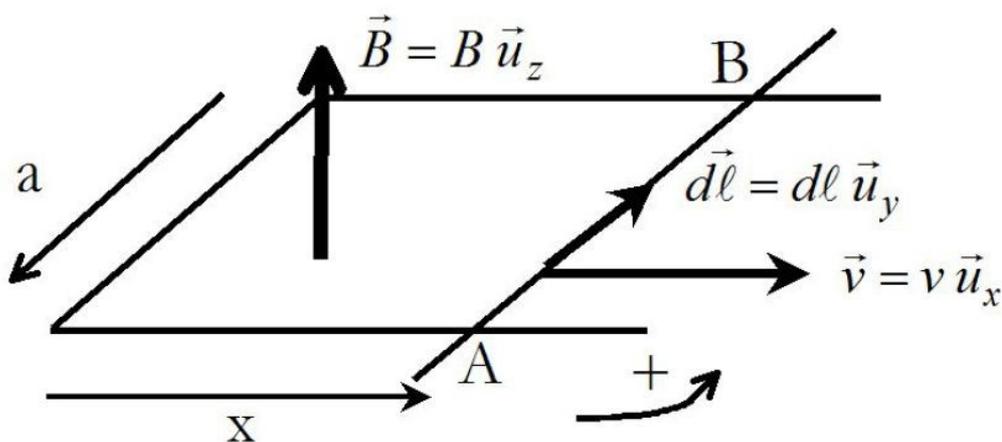


Fig. 5.1 : les rails de Laplace. Le champ magnétique est créé par un dispositif extérieur non représenté et non étudié. Il est supposé uniforme et constant. L'orientation du contour est arbitraire. L'orientation de la surface (non représentée ici) est conforme à celle du contour selon la règle de la main droite. La surface est ainsi orientée comme le champ magnétique.

Les porteurs de charges libres, en l'occurrence, les électrons libres du réseau cristallographique subissent la force de Lorentz qui s'exprime par :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \vec{E}_{em}$$

Tout se passe comme s'ils « voyaient » le champ électrique dit électromoteur donné par :

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}_{em}$$

Nous déterminons ce champ électromoteur pour chaque segment du circuit fermé rectangulaire. Le segment AB en est le seul segment mobile. Les électrons y possèdent donc une vitesse d'entraînement égale à la vitesse de la barre tractée par l'opérateur extérieur. Le champ électromoteur est donc parallèle au segment AB dirigé de B vers A . Dès lors, tous les porteurs de charges du circuit, répartis sur la totalité du circuit rectangulaire, se mettent en mouvement le long des segments correspondants. Déterminons les champs électromoteurs correspondants pour les trois segments fixes du circuit. Puisque les vitesses sont parallèles aux segments, les champs électromoteurs (en tant que produit vectoriels) sont orthogonaux aux segments. Nous nous intéressons à présent à la circulation du champ électromoteur le long du contour formé par le circuit rectangulaire. Pour un champ statique, nous savons que la circulation sur un contour fermé est nulle.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$$

Mais dans cette expérience, la circulation du champ électromoteur sur le contour fermé du circuit électrique rectangulaire ne l'est pas. Le résultat non nul, noté e , est appelé force électromotrice souvent abrégé en f.é.m. Bien que cette f.é.m s'exprime en Volt, ce n'est pas une différence de potentiel. En fait, seule la contribution sur le segment AB est non nulle. Pour tous les autres segments, le champ électromoteur \vec{E}_{em} est perpendiculaire au vecteur de déplacement élémentaire $d\vec{l}$ si bien que leur produit scalaire est nul. Finalement, puisque le champ magnétique est uniforme, puisque \vec{v} et \vec{B} sont perpendiculaires, et enfin puisque \vec{E}_{em} et $d\vec{l}$ sont anti-colinéaires avec notre choix d'orientation, alors :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} = e = -B \cdot a \cdot v$$

Nous voulons à présent reformuler la f.é.m en fonction du flux du champ magnétique à travers une surface qui s'appuie sur le contour de circulation. Si on choisit la surface plane qui s'appuie sur le circuit rectangulaire, alors :

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = - \iint_S B \cdot dS = B \cdot a \cdot v \cdot t$$

si on considère que la barre mobile coïncide avec le côté parallèle en $t=0$.

Il faut insister sur le fait que la surface a été orientée conformément à l'orientation du contour selon la règle de la main droite. On constate par identification :

$$e = - \frac{d\Phi_B(t)}{dt} = - \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Cette relation est appelée loi de Faraday. Elle permet de déterminer la f.é.m le long d'un circuit dit induit en fonction de la dérivée du flux du champ magnétique à travers une surface qui s'appuie sur ce contour. On admet qu'elle est vraie que le circuit soit mobile ou que le champ soit variable, c'est-à-dire en induction de Lorentz ou de Neumann.

2. Equation de Maxwell-Faraday

La reformulation locale est rapide. Il suffit d'utiliser l'argument selon lequel dérivée temporelle et intégration spatiale portent sur des variables indépendantes, temporelle et spatiales. On peut donc échanger leur ordre. Ensuite, on utilise le fait que la relation intégrale est vraie quel que soit le circuit, son contour et la surface appuyée. Ainsi,

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint_S - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

on en déduit :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

appelée équation de Maxwell-Faraday pour des raisons évidentes. Insistons encore sur le fait que pour un tel champ électrique, créé par variation temporelle du champ magnétique, la circulation sur un contour fermé n'est plus nulle contrairement à un champ électrostatique. Pour un tel champ dynamique, la relation $\vec{E} = \text{grad } V$ est aussi incomplète. Nous la compléterons dans le chapitre 8.

Dans le chapitre 3, nous avons complété l'équation de Maxwell-Ampère pour qu'elle soit compatible avec la conservation de la charge. Nous avons pris la divergence de $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ pour constater qu'il manquait quelque chose. Est-ce aussi le cas ici ? Il est facile de vérifier si Maxwell-Faraday est cohérent avec l'ensemble de la théorie :

$$\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = - \text{div}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{ouf ! Il ne manque rien.}$$

3. Quatre équations de Maxwell

Nous disposons à présent des quatre équations de Maxwell complètes. Elles ne subiront plus de changement.

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Maxwell-Gauss}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{Maxwell-Flux}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Faraday}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \text{Maxwell-Ampère}$$

Il convient de les commenter. Les membres de gauche montrent les champs qui résultent des membres de droite qu'on appelle les sources. Qui plus est, les membres de gauche disent la nature géométrique des champs créés selon qu'ils sont champ de divergence ou champ de rotationnel. Un champ de divergence correspond à un champ radial. L'équation de Maxwell-Gauss dit que de tels champs électriques existent et que leurs sources sont des « monopôles » électriques ou en d'autres termes, des charges ponctuelles. En revanche, l'équation de Maxwell-Flux dit qu'il n'existe pas de tels champs magnétiques radiaux faute de sources, c'est-à-dire, de « monopôles » magnétiques. Le premier terme de source dans l'équation de Maxwell-Ampère dit qu'un courant constant crée un champ magnétique orthoradial, à savoir la géométrie d'un champ de rotationnel, qu'on nomme champ magnétostatique puisque la densité de courant peut-être non dépendante du temps. IL y a, à présent, deux nouvelles sources de champ. La variation temporelle du champ électrique crée par Maxwell-Ampère un champ magnétique à géométrie de rotationnel tandis que la variation temporelle du champ magnétique, crée par Maxwell-Faraday, un champ électrique à géométrie de rotationnel également. Nous sommes ainsi entrés dans le domaine dit de l'Electrodynamique avec ces deux nouvelles sources. Nous verrons dans le chapitre suivant, que ce sont ces deux nouvelles sources qui entraînent le comportement ondulatoire du champ électromagnétique.

4. Deux nouvelles sources de champ

Pour mettre en évidence ces deux nouvelles sources de champ, nous regardons des composants bien connus et déterminons les champs électrique et magnétique qu'ils créent moyennant la variation temporelle du champ dual. Le premier composant est le condensateur dont les principales grandeurs ont été rappelées dans le chapitre 4, au paragraphe « énergie magnétique », paragraphe dans lequel nous avons déterminé la densité volumique d'énergie magnétique par comparaison entre les deux composants, condensateur et solénoïde. Si besoin, le lecteur se reportera à ce paragraphe du chapitre 4 pour retrouver les résultats qui vont être utilisés ici, sans rappel.

La problématique est illustrée en figure 5.2, ci-dessous. Loin des armatures, le fil rectiligne parcouru par un courant, crée un champ magnétique orthoradial par la partie magnétostatique de Maxwell-Ampère. On a :

$$B(r)2\pi r = \mu_0 i(t)$$

Fig. 5.2 : bien que la densité de courant soit nulle dans l'espace inter-armatures, un courant dépendant du temps entraîne $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et partant, un champ magnétique à géométrie de rotationnel, à décroissance en $\frac{1}{r}$.

Un courant $i(t)$ dépendant du temps est nécessaire pour que le champ électrique entre les armatures dépende également du temps et qu'un champ de rotationnel soit créé par $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Si nous nous plaçons à une abscisse qui correspond à l'espace inter-armature du condensateur mais à une distance verticale $r > R$ où R est le rayon des plaques du condensateurs, plaques supposées circulaires, alors on peut écrire la formule de Stokes pour déterminer le champ magnétique créé par $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

La question des invariances, de la géométrie des lignes de champ, des parties uniformes qui sortent des intégrales, est volontairement passée sous silence pour laisser le soin au lecteur de s'approprier le calcul.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

On utilise $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ parce que dans l'espace inter-armatures, il n'y a pas de densité de courant.

$$B(r) \cdot 2\pi r = \epsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \mu_0 \pi R^2 \frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \pi R^2 \sigma}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial S \cdot \sigma}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial q}{\partial t} = \mu_0 i(t)$$

On constate que le champ créé par la source située dans l'espace inter-armatures est le même que celui créé par le courant dans le fil d'amené des charges. Si le point courant

est dans l'espace inter-armatures mais proche de l'axe, alors la surface qui s'appuie sur le contour de circulation n'embrasse pas la totalité de la surface des armatures. Nous laissons au lecteur le soin de faire en exercice, le calcul du champ magnétique.

Il faut faire deux remarques importantes :

1. Le champ électrique est localisé dans l'espace inter-armatures et pourtant, cette source crée du champ en tout point de l'univers. Pareillement, un fil parcouru par un courant localisé à l'intérieur du fil, crée du champ partout dans l'univers.

2. On peut objecter que la source $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ n'est pas infiniment longue sur l'axe horizontal

(les deux armatures du condensateur sont assez proches). L'extension très limitée de cette source sur l'axe horizontal pose problème pour l'invariance du champ sur la dimension horizontale. En fait, l'explication est assez subtile et on se contente d'un argument plutôt qualitatif. En fait, il y a deux sources qui se superposent. Le courant

$i(t)$ dans le fil d'amené et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans l'espace inter-armatures. En toute rigueur, aucune des deux n'est invariante sur l'axe horizontal. En revanche, leur superposition l'est. Tout se passe comme s'il n'y avait qu'un fil infiniment long parcouru par le courant. Si on réécrit l'équation de Maxwell-Ampère avec le courant de déplacement :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D) \quad \text{avec} \quad \vec{j}_D = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On montre aisément que $\vec{j} = \vec{j}_D$ si bien que l'espace inter-armatures est équivalent à un bout de fil parcouru par le courant $i(t)$. Le fil d'amené du courant associé au fil équivalent que constitue l'espace inter-armatures reconstruit le fil infini avec l'invariance sur l'axe horizontal.

Pour le second composant, le calcul est très similaire. La figure 5.3 illustre la situation. Là aussi, on se reportera au paragraphe « énergie magnétique » du chapitre 4 pour se remettre à l'esprit les principales grandeurs du problème. Le solénoïde étant parcouru par un courant $i(t)$, le champ uniforme dans le volume intérieur, dépend aussi du temps par $B(t) = \mu_0 n i(t)$. Il y a donc une source dans Maxwell-Faraday. Comme dans le calcul précédent, on écrit la formule de Stokes. On se place à l'extérieur du solénoïde à distance r de l'axe. Encore une fois, la question des invariances et symétries est occultée mais le lecteur devra pouvoir justifier les calculs qui suivent, calculs dans lesquels on ne s'intéresse pas au signe de l'expression finale :

Fig. 5.3 : un solénoïde infiniment long parcouru par un courant dépendant du temps crée du champ électrique par Maxwell-Faraday.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$E(r) \cdot 2\pi r = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -S \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{-\mu_0 N S}{\mathcal{L}} \frac{\partial i}{\partial t}$$

Il faut insister particulièrement sur une remarque unique. Naïvement, on pourrait dire, pour l'extérieur du solénoïde : le champ magnétique est nul à l'extérieur, donc par Maxwell-Faraday, le champ électrique aussi. EN fait, non ! La source, en l'occurrence $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, est certes localisée à l'intérieur du solénoïde, mais cette source crée du champ électrique partout dans l'univers, à décroissance en $\frac{1}{r}$ exactement comme un courant localisé dans un fil crée un champ magnétique partout avec la même décroissance.

Le chauffage par courants de Foucault exploite ce champ électrique et les courants qui en résultent par la loi d'Ohm locale.