

Chapitre 4

Energie électromagnétique

1. Energie électrique de deux charges

Dans ce chapitre, nous abordons la question de l'énergie électromagnétique. Nous commençons par l'énergie électrique par l'intermédiaire d'un système de charges ponctuelles. Puis, nous généralisons à une distribution continue de charges pour aboutir enfin au concept de densité volumique d'énergie attachée au concept même de champ électrique. Nous finissons ce chapitre en évoquant l'énergie magnétique associée au champ magnétique.

Pour définir notre toute première énergie, nous imaginons un univers primordial totalement vide. Nous déposons dans cet univers primordial une toute première charge électrique, soit q_1 . Cette toute première particule n'interagit avec rien puisque l'univers est totalement vide. Avons-nous effectué un travail en déposant cette particule ? Non, l'énergie de cette première particule est nulle, à ce stade.

$$W_1=0$$

Il en va autrement quand nous déposons une deuxième charge, selon la figure 4.1 ci-dessous.

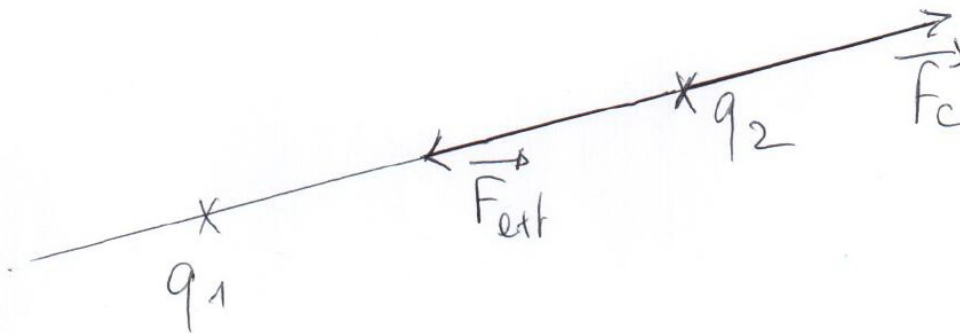


Fig. 4.1 : système de deux charges. La transformation est quasi-statique : un opérateur exerce une force extérieure pour amener la charge q_2 depuis l'infini jusque dans le voisinage de q_1 , à la distance r_{12} . La transformation est quasi-statique en ce sens que q_2 est dans une succession infinie d'états d'équilibre tel que $\vec{F}_C + \vec{F}_{ext} = 0$. On a pris ici deux charges de même signes, la force de Coulomb est répulsive.

Pour déposer la deuxième charge dans le voisinage de la première, nous devons compenser la force de Coulomb que la première exerce sur la deuxième. Par définition, l'énergie de ce système de deux charges est égale au travail de la force extérieure que nous avons appliquée à la deuxième charge pour la placer depuis l'infini dans le voisinage de la première par une transformation dite quasi-statique au cours de laquelle,

la deuxième charge a été dans une succession infinie d'équilibres, soit $\vec{F}_C + \vec{F}_{ext} = 0$ où $\vec{F}_C = q_2 \vec{E}$ correspond à la force de Coulomb que subit la deuxième charge plongée dans le champ électrique créé par la première. Ainsi, l'énergie de ce système de deux charges est défini par :

$$W_2 = \int_{r=\infty}^r \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l}$$

Rappelons que ce travail ne dépend pas du trajet suivi parce que la force de Coulomb est conservative. Moyennant la relation champ - potentiel, $\vec{E} = -\text{grad} V$ ou sa reformulation intégrale équivalente, $\Delta V = \int_i^f -\vec{E} \cdot d\vec{l}$, on obtient :

$$W_2 = \int_{r=\infty}^{r_{12}} \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} = \int_{r=\infty}^{r_{12}} -q_2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_2 \int_{r=\infty}^{r_{12}} -\vec{E} \cdot d\vec{l} = q_2 \cdot \Delta V = q_2 \cdot [V(r) - V(\infty)] = q_2 \cdot V(r_{12})$$

avec $V(\infty) = 0$. Finalement,

$$W_2 = \frac{q_2 \cdot q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{12}}$$

où r_{12} représente la distance entre les deux charges en position finale.

Il faut bien comprendre que ce système ne peut à lui seul rester en l'état. En l'absence d'autres forces, les charges vont s'attirer ou se repousser en fonction des signes de leurs charges électriques et la situation ne peut qu'évoluer. Mais nous définissons tout de même l'énergie électrique par la formule ci-dessus quand bien même au moins une autre force est nécessaire pour assurer la position d'équilibre stable des deux particules.

2. Energie électrique d'un système de N charges discrètes

Pour calculer l'énergie d'un système de N charges, nous commençons par en ajouter une troisième. A l'énergie précédente, W_2 , il faut ajouter le nouveau travail exercé par une force extérieure pour amener la troisième charge dans le voisinage des deux premières défini par les distances r_{13} entre les charges 1 et 3 d'une part et r_{23} entre les charges 2 et 3. Il faut noter que la nouvelle charge est plongée maintenant dans le potentiel électrique créé par les deux charges 1 et 2, ce potentiel étant la superposition des deux potentiels individuels créés respectivement par la charge 1 et la charge 2.

$$W_3 = \frac{q_2 \cdot q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{12}} + q_3 V(r_3) = \frac{q_2 \cdot q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3 \cdot q_1}{4\pi \epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_3 \cdot q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{23}}$$

$$W_3 = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 \cdot q_3}{4\pi \epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 \cdot q_3}{4\pi \epsilon_0 r_{23}}$$

On peut à présent inférer la construction à N quelconque. Si besoin, on passera par l'ajout d'une quatrième charge pour voir apparaître la structure de la formule ainsi que ce qu'elle traduit. On constate qu'il faut cumuler les termes en $\frac{q_i \cdot q_j}{4 \pi \epsilon_0 r_{ij}}$ et ce, pour toutes les paires de charges, ce qu'on traduit par la double somme suivante :

$$W_N = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{q_i \cdot q_j}{4 \pi \epsilon_0 r_{ij}}$$

Toutefois, la notation en $j>i$ pour l'indice de la somme interne n'est pas classique et il en résulte une formule qui n'est pas manipulable. On lui préfère :

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i \cdot q_j}{4 \pi \epsilon_0 r_{ij}}$$

Le facteur $1/2$ résulte du fait qu'avec ces nouveaux indices, chaque paire de charges est comptée deux fois, q_{12} et q_{21} par exemple. On compense par le coefficient $1/2$. Enfin, si on reformule un peu pour mettre en évidence le potentiel total dans lequel est plongée la particule de charge q_i , on obtient :

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j}{4 \pi \epsilon_0 r_{ij}}$$

qu'on peut interpréter comme suit :

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

où V_i représente le potentiel électrique dans lequel est plongée la charge q_i , lequel potentiel est créé par l'ensemble de toutes les autres charges.

Pour conclure ce paragraphe, il faut redonner du sens physique à la quantité, l'énergie, que nous avons calculée. C'est le travail qu'a dû dépenser un opérateur pour fabriquer le système. Si, par exemple, toutes les charges sont de même signe, il aura fallu « pousser » pour constituer le système et mettre les charges dans le voisinage les unes des autres. Si on abandonne le système ainsi constitué à lui-même, il est susceptible de restituer cette énergie puisque les charges vont se repousser comme un ressort comprimé se détend quand il est relaxé.

3. Energie d'une distribution continue de charges, densité volumique d'énergie électrique

La matière ordinaire est composée d'un nombre énorme de charges. Il est hors de question de faire des sommes discrètes. Nous cherchons une reformulation pour une distribution continue de charges. Soit un objet chargé en volume par une densité

volumique ρ pas nécessairement uniforme. On peut découper ce volume en volumes infinitésimaux, $d\tau$ selon la figure 4.2 ci-dessous :

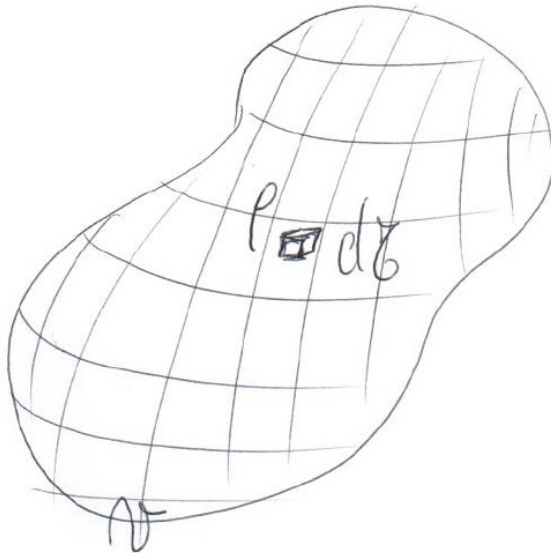


Fig. 4.2 : objet macroscopique chargé en volume et volume infinitésimal, de charge $\rho d\tau$.

La charge quasi-ponctuelle $\rho d\tau$ est plongée dans le potentiel V créé par l'ensemble des autres charges qu'on assimile au potentiel créé par l'objet tout entier au motif que le volume $d\tau$ est infinitésimal, négligeable. Ainsi, la somme discrète devient somme intégrale étendue à tout le volume de l'objet :

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} \rho V d\tau$$

Bien que cette formule soit opérationnelle pour calculer l'énergie d'un objet chargé en volume, nous cherchons à la reformuler pour mettre en évidence le champ électrique plutôt que le potentiel. Pour ce faire, on utilise l'équation de Maxwell-Gauss et on étend la somme intégrale ce qui est possible puisque $\rho=0$ à l'extérieur du volume de l'objet. Ainsi :

$$W = \iiint_{\text{tout l'U}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \cdot V d\tau$$

On utilise ensuite l'identité suivante de l'analyse vectorielle :

$$\operatorname{div}(V \cdot \vec{E}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} V \cdot \vec{E} + V \cdot \operatorname{div} \vec{E}$$

pour obtenir :

$$W = \iiint_{\text{tout l'U}} \frac{1}{2} \epsilon_0 (\operatorname{div}(V \cdot \vec{E}) - \overrightarrow{\operatorname{grad}} V \cdot \vec{E}) d\tau$$

Or, en électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$, soit :

$$W = \iiint_{\text{tout l'U}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \operatorname{div}(V \cdot \vec{E}) d\tau + \iiint_{\text{tout l'U}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

Le deuxième terme de la somme précédente nous arrange. Il s'agit d'une intégrale de volume de $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ qu'on peut donc interpréter comme étant une densité volumique d'énergie électrique. IL reste néanmoins à s'occuper de la première intégrale. En regardant attentivement, on constate que c'est une intégrale de volume de la divergence d'un champ, en l'occurrence $V \cdot \vec{E}$. On peut appliquer la formule de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_{\text{tout l'U}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \operatorname{div}(V \cdot \vec{E}) d\tau = \oint\!\!\!\oint_{\text{confins de l'U}} \frac{1}{2} \epsilon_0 V \cdot \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

La somme intégrale de volume étant étendue à tout l'univers, après application de la formule de Green-Ostrogradsky, l'intégrale de flux doit être étendue à la surface aux confins de l'univers. Depuis les confins de l'univers, l'objet macroscopique dont nous cherchons à établir l'énergie électrique, semble tout petit, ponctuel. Une étoile, une galaxie, même un amas de galaxie semble ponctuel depuis les « confins de l'univers ». Pour une charge ponctuelle, le potentiel qu'elle crée à la distance R est égal à $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ et son champ électrique est égal à $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. Ainsi, l'intégrale de flux devient pour cet objet à symétrie de révolution sphérique :

$$\oint\!\!\!\oint_{\text{confins de l'U}} \frac{1}{2} \epsilon_0 V \cdot \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{2} \epsilon_0 V(\text{confins de l'U}) \cdot E(\text{confins de l'U}) \cdot 4\pi R^2$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\text{confins de l'U}} \frac{1}{2} \epsilon_0 V \cdot \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = 0$$

parce qu'aux confins de l'univers, R tend vers l'infini (et au-delà!). Finalement, dans la somme,

$$W = \iiint_{\text{tout l'U}} \frac{1}{2} \epsilon_0 \operatorname{div}(V \cdot \vec{E}) d\tau + \iiint_{\text{tout l'U}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

la première intégrale est nulle et il reste :

$$W = \iiint_{\text{tout l'U}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

Il faut insister sur le fait qu'il s'agit de l'intégrale de volume dans tout l'univers, partout où il y a du champ créé par l'objet, de la densité volumique d'énergie. On remarquera qu'une charge ponctuelle crée du champ qui ne s'annule jamais même s'il décroît en $\frac{1}{r^2}$ si bien que la somme intégrale doit bel et bien être étendue à tout l'univers.

4. Energie magnétique

Dans ce paragraphe, nous aimerions refaire pour le champ magnétique une démarche comparable. C'est toutefois impossible à ce stade parce que nous n'avons pas défini une grandeur vectorielle appelée potentiel – vecteur qui est en quelque sorte l'équivalent magnétique du potentiel électrique. Il faut donc nous contenter d'une démarche plus intuitive. Pour ce faire, nous allons considérer deux composants fondamentaux qui sont duaux en ce sens que les résultats de l'un, moyennant l'exploitation du champ électrique, s'applique aussi à l'autre moyennant l'exploitation du champ magnétique. Il s'agit évidemment du condensateur et du solénoïde qui est au champ magnétique ce que le condensateur est au champ électrique.

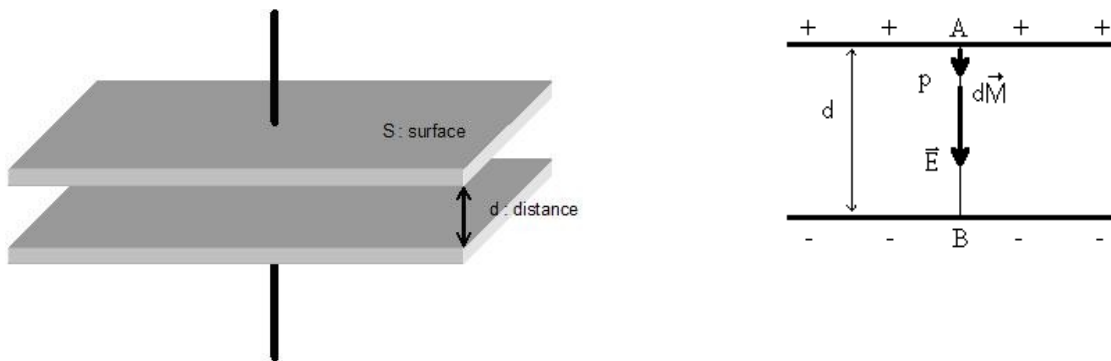


Fig 4.3 : le condensateur plan. Le champ électrique est nul à l'extérieur des plaques, il est uniforme dans le volume inter-plaques, dirigé des charges positives vers les charges négatives, dans l'approximation de plans infinis ce qui revient à considérer un écartement très petit devant les dimensions horizontales des plaques. En d'autres termes encore, on néglige les effets de bord.

On peut rappeler les principaux résultats, obtenus dans l'approximation des plaques infinies ce qui revient à négliger les effets de bord. La capacité du condensateur est définie par le rapport :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{U}$$

où Q est la charge portée par la plaque ou armature chargée positive et $\Delta V = U$ est la tension appliquée aux bornes ou aux armatures du condensateur. Le champ uniforme dans le volume intérieur aux armatures est donné par :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

et tous calculs faits, on obtient la capacité selon la formule :

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$$

Nous voulons à présent reformuler l'énergie stockée par le condensateur, quantité qui découle de considérations purement électrocinétiques selon les deux expressions classiques :

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

En introduisant le champ électrique dans l'énergie issue de l'électrocinétique, on obtient :

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 S^2 e}{2\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} S e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \mathcal{V}$$

où $\mathcal{V} = S \cdot e$ est le volume à l'intérieur des armatures du condensateur. L'énergie stockée est bien l'intégrale étendue à tout l'univers de la densité volumique d'énergie avec un champ uniforme dans le volume et nul à l'extérieur.

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \mathcal{V}$$

Nous nous intéressons à présent au solénoïde de longueur \mathcal{L} constitué de N spires, de surface S .

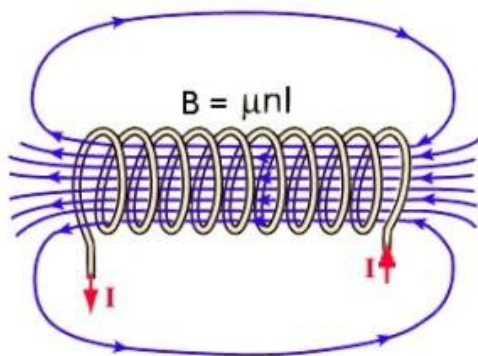


Fig. 4.4 : le solénoïde : tous les résultats sont obtenus dans l'approximation du solénoïde infiniment long auquel cas le champ est nul à l'extérieur et uniforme dans le volume intérieur enfermé par les spires.

Comme pour le condensateur, le champ est nul à l'extérieur du volume défini par l'intérieur du solénoïde et uniforme à l'intérieur donné par :

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{\mathcal{L}} I$$

Le flux magnétique à travers les N spires est alors donné par :

$$\Phi = NBS = \mu_0 \frac{N^2}{\mathcal{L}} SI$$

L'inductance du solénoïde est donné par :

$\Phi = L \cdot I$ ce qui donne :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\mathcal{L}}$$

Si, à présent, on convoque la formule d'énergie stockée dans le solénoïde, formule issue de considérations purement électrocinétique, alors on écrit :

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S}{\mathcal{L}} I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 I^2}{\mu_0 \mathcal{L}^2} S \mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \mathcal{V}$$

et on constate que l'énergie magnétique stockée dans le solénoïde est l'intégrale de volume de la densité d'énergie magnétique définie par $\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \mathcal{V}$$

On admettra ce résultat établi dans un contexte particulier. La densité d'énergie volumique magnétique associée au champ magnétique est égal à :

$$\frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

L'énergie magnétique totale d'un système qui crée un champ magnétique est égal à l'intégrale de volume de la densité d'énergie magnétique sur tout l'univers.