Chapitre 3

Rotationnel d'un champ vectoriel, formulation différentielle du théorème d'Ampère

1. Divergence du champ magnétique

Une des différences fondamentales entre champ électrique et champ magnétique est qu'on ne connaît pas dans la nature l'équivalent magnétique des charges électriques. Si on appelle monopôles électriques, les charges électriques ponctuelles par opposition aux dipôles formées d'une paire de charges, on n'a jamais trouvé de monopôle magnétique. En pratique, cette propriété se manifeste par le fait qu'on n'a jamais mis en évidence aucune configuration pour laquelle le champ magnétique serait purement radial. Si on écrit le « théorème de Gauss » pour les charges magnétiques toujours nulles, il en résulte :

$$\oiint_S \vec{B}.\vec{dS}=0$$

soit, en formulation différentielle :

$$\operatorname{div}\vec{B}=0$$

Cette relation, toujours vraie, est la seconde équation de Maxwell. Il faut insister sur le fait que l'intégrale de flux du champ magnétique est toujours nulle, pour une surface fermée. Le phénomène d'induction, objet du prochain chapitre, mettra en jeu les variations temporelles de l'intégrale de flux du champ magnétique, mais à travers une surface non fermée.

2. Théorème d'Ampère, formulation différentielle, définition du rotationnel du champ magnétique

Les sources de champs magnétiques sont d'une part les courants électriques, c'est-à-dire les charges électriques en mouvement ou les dipôles magnétiques qui ne seront pas l'objet de ce chapitre et qui sont en réalité également des charges électriques en mouvement dans des structures microscopiques. Pour ce qui concerne les courants macroscopiques, le théorème fondamental, équivalent du théorème de Gauss, est le théorème d'Ampère que nous rappelons dans les lignes qui suivent.

Le théorème s'énonce comme suit : la circulation du champ magnétique sur un contour fermé quelconque, notée Γ est égale à la somme algébrique des courants électriques qui traversent une surface quelconque, notée S qui s'appuie sur le contour de circulation multiplié par la constante μ_0 . On écrit classiquement :

$$\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl}=\mu_0 I_S$$

La figure 3.1 illustre ce résultat fondamental de l'électromagnétisme.

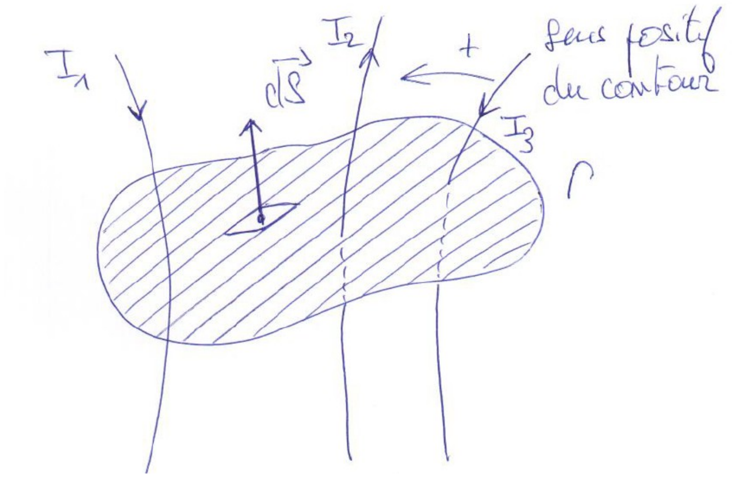

Fig. 3.1 : contour d'Ampère et une surface qui s'appuie sur ce contour. On note les orientations du contour et de la surface conformément à la règle du tournevis ou d'une règle équivalente appelée au sens large, règle de la main droite. I_1 *et* I_3 *sont comptés négatifs et* I_2 *est compté positif avec cette convention de surface.*

Il faut insister comme pour le théorème de Gauss, sur le fait que dans son principe, la géométrie du contour de circulation ou chemin de circulation est quelconque. Toutefois, dans la pratique, les cas classiques qui conduisent à une résolution analytique, correspondent, sauf extraordinaire, à un contour circulaire ou rectangulaire. Si le contour est circulaire (cf. infra), le vecteur de déplacement élémentaire $\vec{dl}$ est alors orthoradial, tandis qu'il est colinéaire aux segments qui composent le contour rectangulaire.

Insistons également que dans l'énoncé du théorème d'Ampère, le choix de la surface qui permet de déterminer la somme algébrique des courants au second membre est quelconque dès lors que cette surface « s'appuie » sur le contour. Souvent, dans les cas classiques, le contour de circulation est circulaire ou rectangulaire, donc plan. Dans ce cas, la surface la plus simple qui s'appuie sur ce contour est plane également. Il n'y pas de raison, dès lors, dans choisir une autre. Toutefois, il faut bien comprendre qu'on ne change pas la somme algébrique des courants qui traverse une telle surface plane qu'on peut imaginer comme une pellicule de savon tendue sur un anneau de plastique en la gonflant tant qu'elle s'appuie sur le contour.

Le contour doit être orienté dans un sens ou dans l'autre, arbitrairement. En revanche, il faut bien comprendre que dès lors qu'on a choisi un sens d'orientation du contour, on a choisi dans le même temps l'orientation de la surface qui s'appuie sur le contour qui va permettre de déterminer le signe d'un courant qui la traverse. L'orientation simultanée du contour et de la surface qui s'appuie, est conforme à la règle de la main droite ou de l'une de ses variantes (tournevis, tire-bouchon, etc…). Dans la variante « tournevis », si on actionne le « tournevis » dans le sens d'orientation du contour, le déplacement de la vis imaginaire détermine l'orienation de la surface. L'application de cette règle est illustrée par les deux situations classiques suivantes : champ magnétique créé par un fil rectiligne infiniment long parcouru par un courant d'une part, et champ magnétique créé par un solénoïde infiniment long parcouru par un courant.

La figure 3.2 illustre l'application du théorème d'Ampère pour le cas du fil rectiligne infini parcouru par un courant. Pour ce qui concerne les invariances, il est clair que le champ magnétique est invariant en z (on travaille en coordonnées cylindriques) parce que le fil est infiniment long. Toutes les positions en z sont indiscernables. Il en irait bien sûr autrement si le fil avait une longeur finie, d'où le modèle infini qui permet de réduire la dimension du problème. Par ailleurs, le champ magnétique est invariant en θ . En effet, le fil est identique par toute rotation sur lui-même. Le champ magnétique ne dépend que de r définie comme étant la distance du point d'étude au fil source. Pour ce qui concerne la direction du champ, on se reportera à un cours de première année pour l'étude des symétries. On rappelle simplement ici que le champ magnétique est perpendiculaire aux plans de symétrie de ses sources (les courants) et qu'il est dans les plans d'antisymétrie des sources. Ici, il en résulte que le champ magnétique est orthoradial.

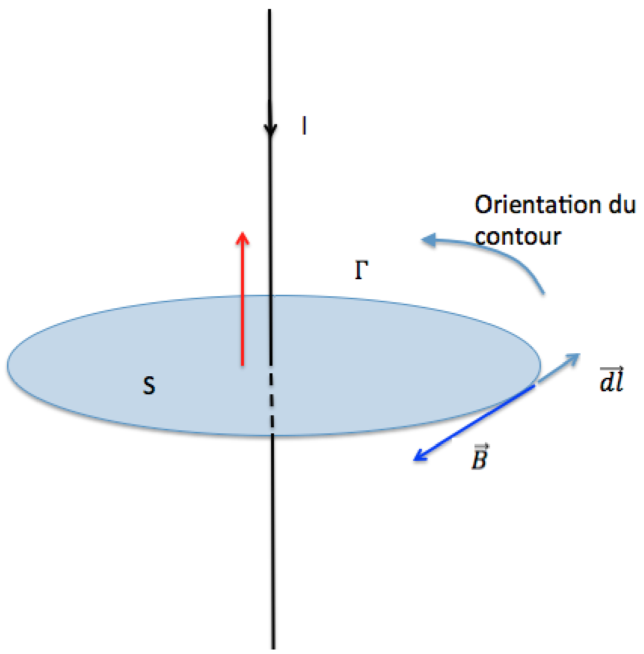

Fig. 3.2 : contour de circulation circulaire pour la détermination du champ orthoradial créé par le fil rectiligne infini parcouru par un courant.

Le champ magnétique est orthoradial tout comme les déplacements élémentaires $\vec{dl}$. Le produit scalaire de l'intégrale de circulation devient produit des normes au signe près selon le choix de l'orientation du contour. Il en résulte :

$$\oint_\Gamma \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_S = \oint_\Gamma B(r).dr = B(r)\oint_\Gamma dr = 2\pi r B(r) = \mu_O I$$

soit finalement :

$$B(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Le sens du champ magnétique est donné par le signe de I .

Le deuxième cas d'école consiste à calculer le champ magnétique dans le volume intérieur d'un solénoïde infiniment long constitué de spires circulaires jointives, selon les représentations des figures 3.3 et 3.4. Les arguments d'invariance et de symétrie conduisent au fait que le champ magnétique est uniforme dans le volume délimité par le cylindre formé par les spires jointives. Toutefois, nous admettons ce résultat sans démonstration. Par certains égards, le solénoïde peut être considéré comme l'équivalent magnétique du condensateur plan. Nous admettons sans démonstration les résultats suivants : à l'intérieur du volume délimité par le cylindre formé par les spires, le champ magnétique est uniforme, dirigé sur l'axe du cylindre et son sens est donné par le sens de circulation du courant dans les spires selon la régle du tournevis. La figure 3.4 illustre la définition du sens du champ magnétique en fonction du sens du courant.

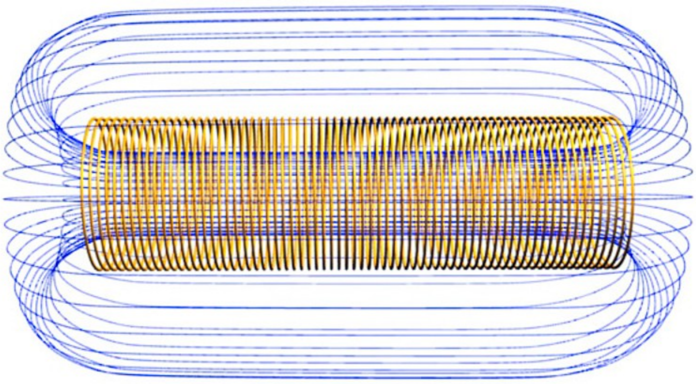

Fig. 3.3 : le modèle du solénoïde à spires jointives. Les lignes de champ sont représentés en bleu.

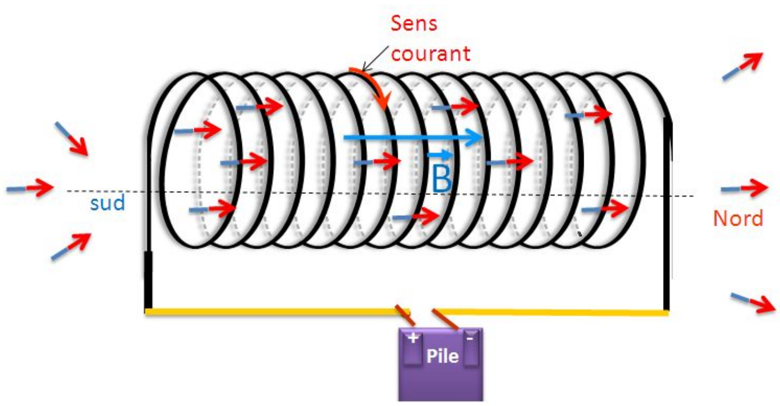

Fig. 3.4 : sens du champ magnétique en fonction du sens de circulation du courant.

Par ailleurs, à l'extérieur du volume, le champ est négligeable et nous l'assimilerons à zéro pour les calculs qui suivent. Pour l'application du théorème d'Ampère, nous choisissons un contour de circulation rectangulaire noté *EFGH* pour partie à l'intérieur du solénoïde et pour partie à l'extérieur, les grands côtés étant selon l'axe du cylindre selon la figure 3.5.

Il convient à présent de calculer les deux membres du théorème d'Ampère, selon :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I_S$$

Pour ce qui concerne le membre de gauche, c'est-à-dire l'intégrale de circulation, elle peut être décomposée sur les quatre brins de controu qui la compose. Pour les deux segments verticaux FG et HE , leur contribution est nulle par $\vec{B} \perp \vec{dl}$ puisque ces segments sont verticaux et le champ magnétique, sur l'axe du cylindre, donc horizontal. Pour le segment GH , sa contribution est nulle par nullité du champ magnétique (admise) à l'extérieur du solénoïde. Il ne reste de contribution non nulle que sur le segment EF pour lequel $\vec{B}$ et $\vec{dl}$ sont colinéaires et de même sens. Comme de plus, le champ est uniforme dans cette région, l'intégrale de circulation se réduit donc à $B.L$ où L représente la longueur du segment EF . Il reste à déterminer le membre de droite. Remarquons que la surface plane qui s'appuie sur le contour de circulation est le rectangle $EFGH$. Il est traversé par un certain nombre de spires qu'il s'agit de déterminer. Si on appelle n , la densité de spires par unité de longueur, le nombre de spires sur la longueur L est donné par $n.L$ par définition d'une densité linéique. Compte tenu de l'orientation du contour de circulation sur la figure 3.5 et compte tenu de l'orientation de la surface qui en résulte, nous constatons que les $n.L$ spires traversent la surface dans le même sens que le vecteur de surface. On obtient ainsi :

$$B.L = \mu_0.n.L.I$$

soit après simplification,

$$B = \mu_0.n.I$$

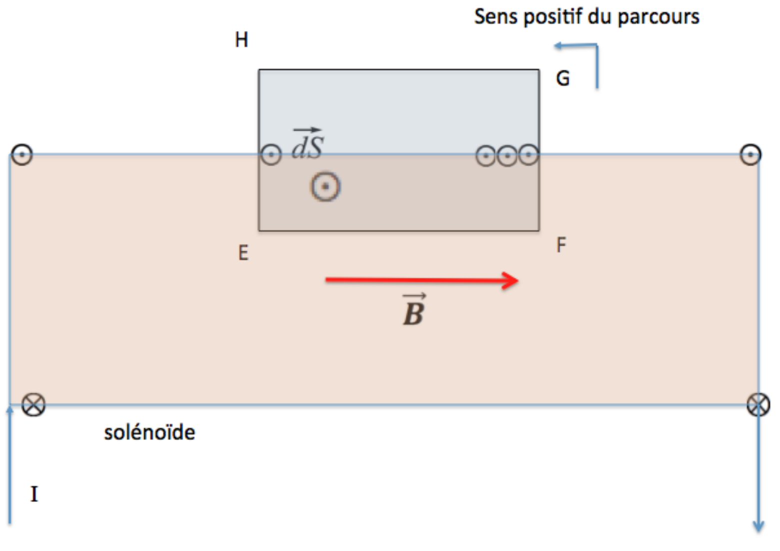

Fig. 3.5 : contour de circulation pour déterminer le champ magnétique uniforme dans le solénoïde.

En tant que forme intégrale, le théorème d'Ampère porte sur un contour et une surface macroscopiques. Tout comme pour le théorème de Gauss, ce résultat ne dit rien sur la manière dont les courants qui traversent la surface qui s'appuie sur le contour sont distribués spatialement. On est donc amené à faire une opération assez comparable à la différentiation spatiale qui a conduit à la définition de la divergence du chapitre précédent. Il y a néanmoins une différence de taille. On ne peut diviser par un volume enfermé qui n'a pas de sens ici. On peut penser à diviser l'intégrale de circulation par l'aire de la surface qui s'appuie sur le contour. C'est bien ainsi qu'il faut procéder. Il vient :

$$\lim_{S \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \vec{B}.\vec{dl}}{S} = \lim_{S \to 0} \frac{\mu_0 I_S}{S}$$

Le second membre correspond à une quantité locale exprimée en A/m^2 qui fait penser au vecteur densité de courant. Mais le premier membre est un scalaire. Pour résoudre ce paradoxe apparent, il convient de faire l'analyse suivante. Pour le membre de gauche, il s'agit d'une circulation locale du champ magnétique. Mais cette circulation peut se faire dans trois plans orthogonaux deux à deux soit xOy, yOz et zOx. Si on considère la circulation locale dans le plan yOz, il est clair que pour qu'il y ait une contribution dans le membre de droite, il faut que la densité de courant ait une composante sur l'axe Ox sans quoi, il ne peut y avoir de courant élémentaire qui traverse la surface qui s'appuie sur ce contour, surface elle-même dans le plan yOz. Plus précisément, il apparaît que le second membre de la définition différentielle précédente fait apparaître la composante selon Ox du vecteur densité de courant. Il vient :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}\,B}\right)_x = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_{\Gamma yOz} \vec{B}.\vec{dl}}{S} = \lim_{S \to 0} \frac{\mu_0 I_S}{S} = \mu_0 . j_x$$

qui définit une des trois composantes du vecteur densité de courant.

De façon analogue, on peut définir les deux autres composantes par les relations :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}\,B}\right)_y = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_{\Gamma xOz} \vec{B}.\vec{dl}}{S} = \lim_{S \to 0} \frac{\mu_0 I_S}{S} = \mu_0 . j_y$$

et

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}\,B}\right)_z = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_{\Gamma xOy} \vec{B}.\vec{dl}}{S} = \lim_{S \to 0} \frac{\mu_0 I_S}{S} = \mu_0 . j_z$$

On écrit synthétiquement :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\,B} = \mu_0 . \vec{j}$$

qu'on interprète comme étant la formulation différentielle ou locale du théorème d'Ampère.

Notons que le rotationnel est un opérateur de diffrentiation spatiale qui s'applique à un vecteur (ici, le champ magnétique) et qui « retourne » un vecteur. En toute rigueur, il faudrait l'écriremais on lui préfère la notation $\overrightarrow{\text{rot}\,B}$ pour d'évidentes raisons de simplicité.

3. Formule de Stokes

La formule de Stokes est pour l'opérateur rotationnel ce que la formule de Green-Ostrogradsky est pour l'opérateur divergence. On l'établit comme suit :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 . I_S = \oiint_S \mu_0 \vec{j}.\vec{dS} = \oiint_S \overrightarrow{\text{rot}\,B}.\vec{dS}$$

soit en prenant les deux membres extrêmes :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}.\vec{dl} = \oiint_S \overrightarrow{\text{rot}\,B}.\vec{dS}$$

qu'on interprète comme suit : l'intégrale de circulation du champ magnétique sur tout contour fermé est égal à l'intégrale de flux du rotationnel du champ magnétique à travers toute surface fermée qui s'appuie sur le contour de circulation.

Tout comme pour la formule de Green-Ostrograsky par rapport à la définition différentielle de la divergence, il n'y a dans la formule de Stokes ni plus ni moins d'information que dans la définition différentielle du rotationnel. Ainsi, les deux relations :

$\overrightarrow{(\text{rot}\,B)} = \mu_0 . \vec{j}$ et $\oint_{\Gamma} \vec{B}.\vec{dl} = \oiint_S \overrightarrow{\text{rot}\,B}.\vec{dS}$ sont-elles strictement équivalentes et définissent toutes deux le rotationnel.

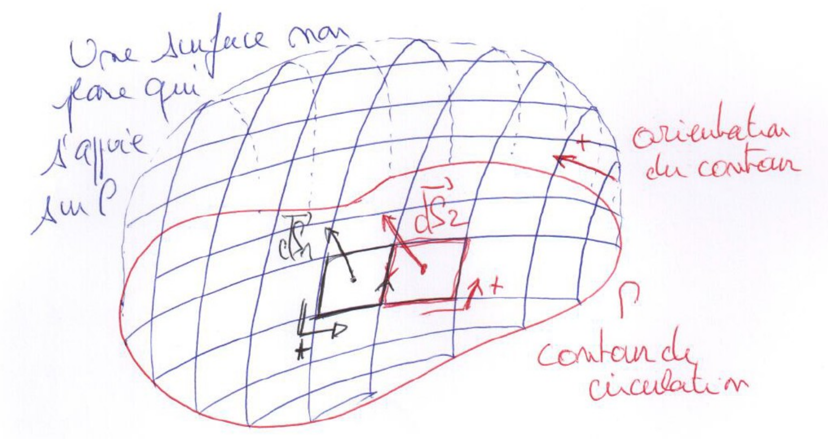

Fig. 3.6 : reconstruction de l'intégrale de circulation macroscopique par sommation de circulations élémentaires qui maillent la surface qui s'appuie sur le contour macroscopique.

La construction de la formule de Stokes suggère la même remarque subtile que dans le chapitre précédent illustrée par la figure 3.6. On y voit un contour et une surface non plane qui s'appuie sur ce contour. La surface qui s'appuie est découpée en surfaces infinitésimales qui définissent autant de contours élémentaires. Quand on considère deux surfaces adjacentes et les contours élémentaires correspondants, on s'aperçoit que les deux contours élémentaires partagent un segment commun. Hors, ces deux segments communs sont orientés en sens inverses de manière à ce que toutes les surfaces élémentaires soient orientées dans le même sens. Ainsi, quand on superpose les circulations sur les contours élémentaires, les segments adjacents se neutralisent deux à deux et on obtient finalement l'intégrale de circulation sur le contour macroscopique sur lequel s'appuie la surface.

4. Rotationnel en coordonnées cartésiennes

Là encore, les deux définitions précédentes (forme différentielle et forme intégrale ou formule de Stokes) sont conceptuelles. pas très opérationnelles. En général, les champs de vecteur sont manipulés par l'intermédiaire des coordonnées des vecteurs. Il nous faut donc regarder comment les deux définitions conduisent à l'expression du rotationnel d'un champ de vecteur dans les systèmes classiques de coordonnées. Nous nous contenterons de faire le calcul en coordonées cartésiennes et admettrons les résultats en coordonnées sphériques et cylindriques (cf. formulaires).

Comme le vecteur rotationnel est défini par trois circulations dans des plans orthogonaux deux à deux, nous ne faisons qu'un seul calcul et les deux autres composantes s'en déduiront de façon tout à fait analogue. Nous choisissons de circuler dans le plan yOz ce qui conduit comme on l'a vu à la composante du rotationnel sur l'axe Ox . Les coordonnées cartésiennes suggèrent un contour de circulation infinitésimal rectangulaire défini à la figure 3.7.
Pour ce faire, nous définissons un contour élémentaire et la surface la plus simple qui s'appuie sur ce contour.

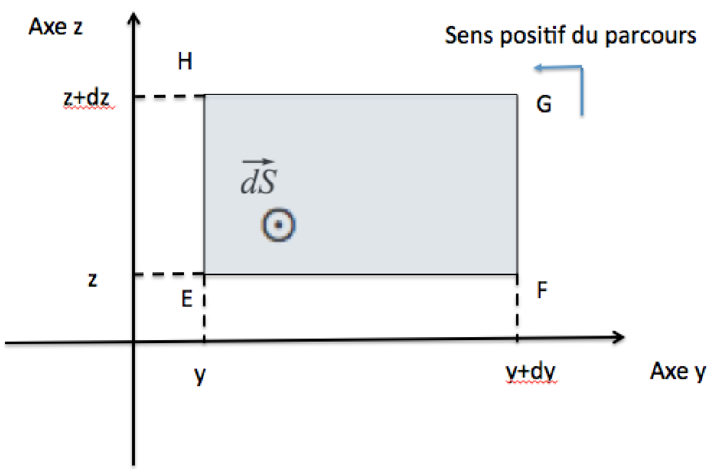

Fig. 3.7 : un contour élémentaire dans le plan yOz *. On note que le contour et la surface sont orientés conformément à la règle du tire-bouchon.*

La circulation élémentaire sur ce contour infinitésimal $EFGH$ est composée de quatre segments, deux horizontaux (EF et GH) et deux verticaux (FG et HE). Pour les segments horizontaux parallèles à l'axe Oy , c'est la composante sur ce même axe du champ magnétique qui importe. Sur les deux segments verticaux, c'est la composante sur l'axe Oz du champ magnétique qui importe. La circulation élémentaire, notée $d\Gamma$ sur ce contour infinitésimal s'écrit en prenant bien soin d'évaluer en quelles coordonnées il faut considérer les composantes de champ :

$$d\Gamma=B_y(z).dy+B_z(y+dy).dz-B_y(z+dz).dy-B_z(y).dz$$

$$d\Gamma=B_z(y+dy).dz-B_z(y).dz-(B_y(z+dz).dy-B_y(z).dy)$$

soit finalement :

$$d\Gamma=\frac{\partial B_z}{\partial y}.dy.dz-\frac{\partial B_y}{\partial z}.dz.dy$$

et par division par la surface élémentaire qui s'appuie sur ce contour infinitésimal :

$$(\overrightarrow{\mathrm{rot}\,B})_x=\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}$$

On montre (on laisse le soin au lecteur) que les deux autres composantes s'obtiennent par :

$$(\overrightarrow{\mathrm{rot}\,B})_y=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{rot}\,B})_z=\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}$$

Pour les expressions du rotationnel en coordonnées cylindriques et sphériques, on se reportera aux formulaires.

5. Opérateur Nabla

Les trois opérateurs différentiels que nous connaissons, grad, div et rot sont représentés avantageusement en coordonnées cartésiennes par un vecteur-opérateur dit Nabla, représenté comme suit :

$$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$$

Ce n'est pas une grandeur physique mais un opérateur qui agit sur un scalaire ou un vecteur selon les expressions suivantes :

si V est le potentiel électrique, un champ scalaire, la formule opérationnelle du gradient en coordonnées cartésiennes s'écrit, en fonction de l'opérateur Nabla par multiplication du scalaire V par l'opérateur Nabla :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V=\vec{\nabla}\,.\,V=V\,.\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial V}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial y}\\ \frac{\partial V}{\partial z}\end{pmatrix}$$

De façon analogue, la divergence d'un champ vectoriel, le champ électrique par exemple, s'écritmoyennant le produit scalaire :

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\vec{\nabla}\,.\,\vec{E}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{pmatrix}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

et enfin, on vérifiera que le rotationnel d'un champ de vecteur, le champ magnétique par exemple, devient le produit vectoriel de l'opérateur Nabla par le champ magnétique :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,B=\vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}B_x\\ B_y\\ B_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\\ \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\end{pmatrix}$$

6. Equation de Maxwell-Ampère

Nous disposons à présent de trois équations locales qui gouvernent le comportement des champs électriques et magnétiques. Nous avions déjà affirmé que les deux premières qui portent sur les divergences des champs sont définitives. Elles sont vraies partout et tout le temps :

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\mathrm{div}\,\vec{B}=0$$

En revanche, la nouvelle équation,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,B=\mu_0\,\vec{j}$$

est incomplète. Elle n'est valable que pour les champs magnétostatiques. Il va être facile de la corriger pour obtenir sa forme définitive. Nous voyons là une expression de la puissance de la théorie. En fait, sous la forme précédente, elle est incompatible avec l'équation de conservation de la charge. En effet, si on prend la divergence des deux membres, on écrit :

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}B})=\mu_0 \operatorname{div}\vec{j}=0$$

parce que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Cette relation est vraie dans tout régime pour lequel il n'y a pas d'accumulation de charge localisée auquel cas $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$. Toutefois, dans le cas général :

$$\operatorname{div}\vec{j}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

qui est l'équation locale de conservation de la charge.

Il est aisé de rajouter le terme dans la forme locale duu théorème d'Ampère qui ramène à l'équation de conservation de la charge. En effet, si :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}B}=\mu_0.(\vec{j}+\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

alors,

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}B})=\mu_0.(\operatorname{div}\vec{j}+\epsilon_0 \operatorname{div}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})=0$$

or, on peut échanger l'ordre de la différentiation spatiale (la divergence) avec la dérivée temporelle parce que temps et espace sont des variables indépendantes.

Finalement,

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}B})=\mu_0.(\operatorname{div}\vec{j}+\epsilon_0\frac{\partial \operatorname{div}\vec{E}}{\partial t})=\mu_0.(\operatorname{div}\vec{j}+\epsilon_0\frac{\partial \rho}{\epsilon_0 \partial t})=0 \quad \text{par} \quad \operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La relation maintenant définitive dite de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}B}=\mu_0.(\vec{j}+\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

Elle fait apparaître un terme homogène à une densité de courant, proportionnel à la dérivée temporelle du champ électrique. Ce terme est appelé courant de déplacement. Nous entrons avec cette équation dans l'Electromagnétisme où les champs électriques et magnétiques ne sont plus statiques.