Chapitre 2

Divergence d'un champ vectoriel, formulation différentielle du théorème de Gauss

1. Théorème de Gauss, divergence, formulation locale

Dans le paragraphe précédent, nous avons défini l'intégrale de flux à travers une surface dans le contexte d'un phénomène de transport (le déplacement des porteurs de charge). Rien n'empêche formellement de généraliser le concept à n'importe quel champ de vecteur, qu'il y ait ou non un phénomène de transport. Le théorème de Gauss sous forme intégrale s'énonce ainsi. Le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque est égal à la charge électrique totale contenue dans le volume délimitée par la surface divisé par la constante Oz , permittivité du vide. On écrit :

$$\oiint_S \vec{E}\,.\,\vec{dS}=\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

La figure 2.1 illustre ce résultat fondamental de l'électromagnétisme.

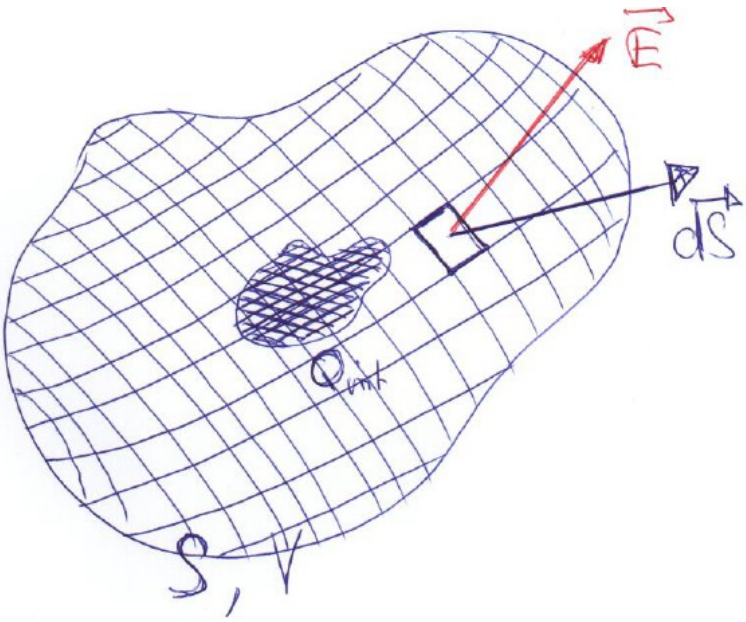

Fig. 2.1 : surface de Gaus

Il faut insister sur le fait que dans son principe, la surface est de géométrie quelconque. Si dans le principe, la surface est de géométrie quelconque (pourvu qu'elle soit fermée), dans la pratique des cas classiques qui conduisent à une résolution analytique, nous ne serons confrontés qu'à trois types de surface (sauf extraordinaire) : la sphère, le cylindre à section droite circulaire et le parallélépipède rectangle. La sphère et le cylindre sont illsutrés à la figure 2.2. Pour la sphère, le vecteur normal de surface est radial tandis que pour le cylindre, il faut distingeur deux types de surface : les deux sections droites circulaires (« les couvercles ») qui sont planes et pour lesquelles le vecteur de surface est selon l'axe du cylindre et la paroi latérale pour laquelle le vecteur de surface est radial. Il semble évident que la géométrie sphérique suggère l'utilisation des coordonnées de même nom, c'est-à-dire, les coordonnées sphériques et que la géométrie cylindrique suggère l'utilisation des coordonnées cylindriques.

En revanche, dans le vaste monde des modélisations numériques, rien n'empêchera d'utiliser des formes géométriques sophistiquées décrites par des maillages pour peu qu'on connaisse l'état du champ électrique en tout point de la surface.

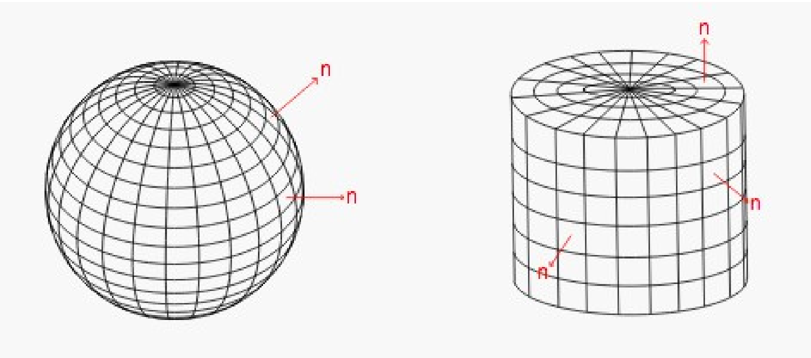

Fig. 2.2 : surfaces de Gauss sphérique et cylindrique, avec les vecteurs de surface correspondants.

En tant que forme intégrale, le théorème de Gauss porte sur une surface et un volume macroscopiques en ce sens qu'on peut les rendre aussi grands qu'on veut. Toutefois, ce résultat ne dit rien sur la manière dont cette charge totale enfermée par la surface est distribuée dans le volume intérieur. Si on souhaite en savoir plus sur la distribution des charges, il convient par exemple de diviser le volume correspondant à la surface de Gauss en deux et d'appliquer le théorème sur ces deux nouveaux objets. Cette opération permet d'affiner quelque peu la connaissance de la distribution des charges dans le volume de départ. Si on veut affiner davantage, à la limite, il convient de diviser le volume à l'infini. On définit donc la divergence du champ électrique comme la limite du flux volumique du champ électrique à travers une surface fermée quand ce volume tend vers zéro.

$$\operatorname{div}\vec{E}=\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_S \vec{E}.\vec{dS}}{V}=\lim_{V\to 0}\frac{Q_{\text{int}}}{V.\epsilon_0}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dans une grande mesure, ce nouveau concept de divergence est assez proche du concept élémentaire de vitesse instantanée. Si on définit la distance totale parcourue au cours d'un trajet, on n'a aucune idée sur la manière dont ce trajet a été parcouru d'un point de vue cinématique. On commence par définir la vitesse moyenne en divisant la distance parcourue par le temps de parcours puis on fait tendre le temps de parcours vers 0 de manière à définir la vitesse instantanée. Ainsi, la divergence d'un champ vectoriel est définie comme une opération de différenciation spatiale. Elle permet d'obtenir le flux volumique local, défini en chaque point d'espace de la même manière que la vitesse instantanée définit la vitesse en chaque point du temps. On obtient donc moyennant l'opérateur divergence qui agit sur un champ de vecteur la reformulation locale (locale parce que valable en chaque point de l'espace tout comme la vitesse est instantatée en ce sens qu'elle est définie en chaque instant).

On retiendra que le théorème de Gauss s'écrit en formulation locale ou différentielle :

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

C'est la première des quatre équations de Maxwell qu'on appelle généralement équation de Maxwell – Gauss pour des raisons évidentes. Elle lie la divergence du flux électrique défini comme étant le flux volumique local du champ électrique en tout point de l'espace à la valeur locale de la densité de charge en ce point. Il faut noter que la relation est toujours vraie, que le champ électrique soit statique ou non. Elle ne sera plus modifiée et on peut d'ores et déjà l'incorporer dans la liste des équations universelles.

2. Formule de Green-Ostrogradsky

Pour établir la formule de Green-Ostrogradsky, nous reformulons l'équation de définition de la divergence, comme suit :

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{d\Phi}{d\tau}$$

où $d\tau$ représente le volume infinitésimal délimité par la surface de Gauss et $d\Phi$, le flux élémentaire du champ électrique à travers cette petite surface de Gauss. Cette dernière équation illustre bien le fait que la divergence est définie par une opération de différentiation spatiale. On peut la réécrire comme suit :

$$d\Phi=\operatorname{div}\vec{E}.d\tau$$

qu'on peut interpréter comme suit : le flux élémentaire à travers une surface infinitésimale est obtenu par le produit de la divergence du champ éléctrique par le volume élémentaire enfermé dans cette surface élémentaire.
Nous considérons à présent, à nouveau, le flux du champ électrique à travers une surface macroscopique. Cette surface macroscopique et le volume intérieur qu'elle délimite, est illustrée en figure 2.3. Le volume macroscopique est obtenu comme superposition d'une infinité de volumes infinitésimaux. En tant que grandeur extensive, le flux à travers la surface macroscopique peut être écrit comme superposition des flux infinitésimaux selon :

$$\oiint_{S_{macro}}\vec{E}.\vec{dS}=\iiint_{V_{macro}}\operatorname{div}\vec{E}\,d\tau$$

qu'on appelle formule de Green-Ostrogradsky.

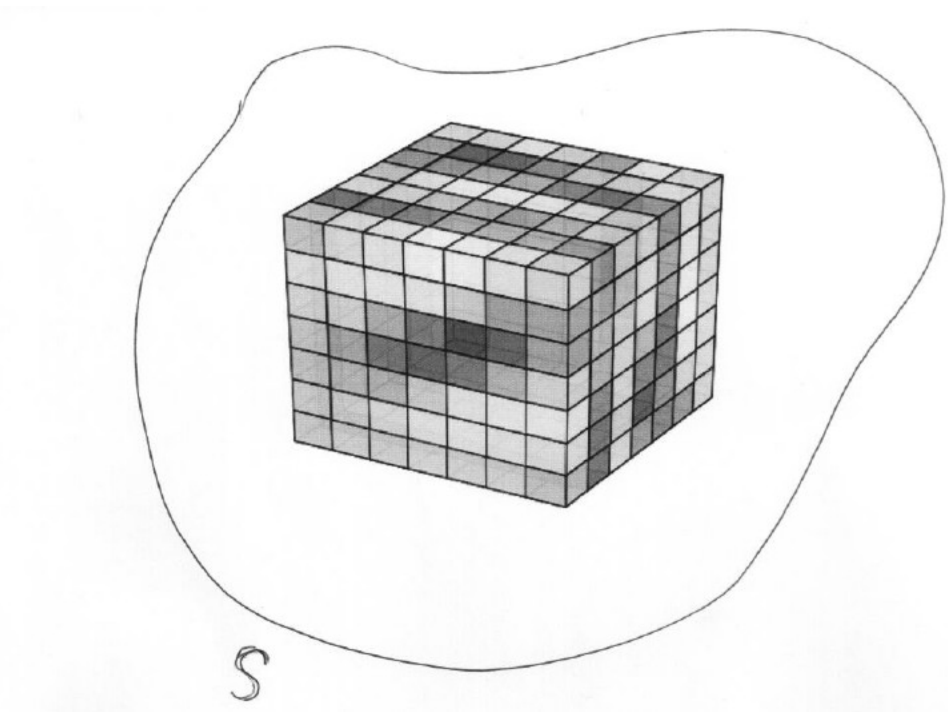

Fig. 2.3 : reconstruction du volume intérieur par juxtaposition de volumes infinitésimaux. Ces volumes sont cubiques sauf lorsqu'on s'approche de la surface extérieure pour laquelle la géométrie des volumes doit s'adapter à celle de l'enveloppe.

Si on reprend l'analogie précieuse avec la vitesse instantanée, il importe de comprendre que la formule de Green-Ostrogradsky n'est jamais que la reformulation intégrale de la définition de la divergence tout comme les deux équations suivantes sont strictement équivalentes (dans le cas d'une cinématique sur l'axe x) :

$$v_i(t)=\frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \Delta x = x_f - x_i = \int_{t_i}^{t_f} v_i(t).dt$$

Il n'y a dans la formulation intégrale ni plus ni moins d'information que dans la formulation différentielle.

Les deux équations,

$$\operatorname{div}\vec{E}=\lim_{V\to 0}\frac{\oiint_S \vec{E}.\vec{dS}}{V} \quad \text{et} \quad \oiint_{S_{macro}} \vec{E}.\vec{dS}=\iiint_{V_{macro}} \operatorname{div}\vec{E}\,d\tau$$ sont donc strictement équivalentes.

La construction de la formule de Green-Ostrogradsky suggère néanmoins une remarque subtile. Quand on superpose les flux élémentaires, on obtient finalement le flux à travers l'enveloppe extérieure de la surface macroscopique. Si on déploie la surface totale de toutes les surfaces élémentaires, on comprend intuitivement qu'elle va être énorme, bien plus grande que la surface de l'enveloppe extérieure. N'y a-t-il pas une contradiction ? En fait, non et la figure 2.4 permet de comprendre comment cette contradiction apparente est résolue. La figure 2.4 représente deux volumes infinitésimaux qu'on a définis parallélépipède rectangle pour la lisibilité mais l'argument reste valable quelle que soit la géométrie des volumes élémentaires.

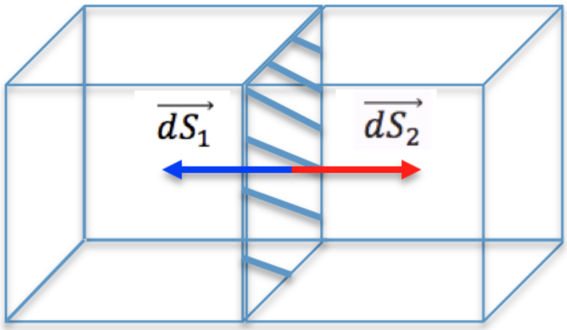

Fig. 2.4 : deux volumes élémentaires et les surfaces qui les délimitent. Quand on somme les deux flux élémentaires correspondants à ces deux volumes, on constate que les deux flux à travers la surface commune hachurée sont égaux et opposés et se compensent. Ne reste que le flux à travers l'enveloppe extérieure définie par l'adjonction des deux volumes élémentaires.

Ces deux volumes partagent une surface commune hachurée sur la figure. Le champ électrique est parfaitement défini en cette surface commune (pas de discontinuité du champ à la surface). On se souvient aussi que par convention, les surfaces de Gauss sont toujours orientées depuis le volume intérieur vers l'extérieur. Ainsi pour le volume de gauche, le vecteur de surface est dirigé vers la droite tandis que pour le volume de droite, le vecteur de surface est orientée vers la gauche. Les deux flux à travers la surface commune sont donc égaux et opposés et se compensent. Quand on généralise à la superposition de tous les volumes infinitésimaux qui constituent le volume macroscopique, on comprend que les flux à travers toutes les surface intérieures se compensent deux à deux entre volumes élémentaires adjacents tant et si bien que finalement, ne subsiste que le flux à travers l'enveloppe extérieure de la surface macroscopique.

3. Divergence en coordonnées cartésiennes

Les deux définitions précédentes (forme différentielle et forme intégrale ou formule de Green-Ostrogrdsky) sont conceptuelles. Elles prolongent la notion de flux à travers une surface macroscopique qui en tant que forme intégrale montre des limites comme le concept de vitesse moyenne est prolongé par le concept de vitesse instantanée. En revanche, elles ne sont pas très opérationnelles. En général, les champs de vecteur sont manipulés par l'intermédiaire des coordonnées des vecteurs. Il nous faut donc regarder comment les deux définitions conduisent à l'expression de la divergence d'un cahmp de vecteur dans les systèmes classiques de coordonnées. Nous nous contenterons de faire le calcul en coordonées cartésiennes et admettrons les résultats en coordonnées sphériques et cylindriques.

Il nous faut donc déterminer les cordonnées de la divergence d'un vecteur à partir de sa définition différentiell :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{d\Phi}{d\tau}$$

Pour ce faire, nous définissons une surface élémentaire et son volume enfermé comme suit : un parallélépipède rectangle infinitésimal de dimensions dx , dy , dz , est placé au point de coordonnées (x, y, z) dans un repère cartésien selon la figure 2.5.

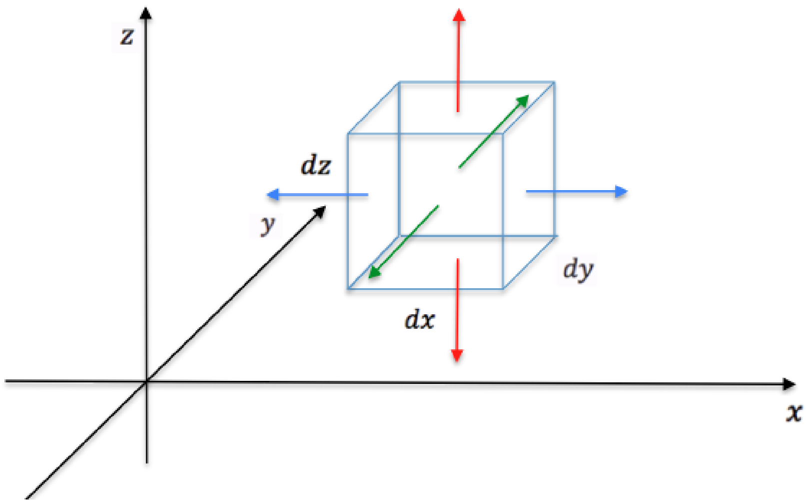

Fig. 2.5 : un élément de volume $dx.dy.dz$ et les vecteurs de surface de ses six faces.

Le flux à travers la surface parallélépipèdique fermée est la superposition de six flux à travers les six faces du parallélépipède dont les vecteurs normaux de surface peuvent être appariés deux à deux. Les deux vecteurs de surface représentés en rouge correspondant aux surfaces horizontales, les vecteurs représentés en bleu correspondent aux surfaces verticales parallèles au plan yOz et enfin, les vecteurs de surface en vert correspondent aux surfaces verticales parallèles au plan xOz. Nous allons détailler le calcul du flux à travers les deux surfaces horizontales et généraliser de façon analogue aux surfaces verticales.

Le flux à travers la surface horizontale supérieure fait appel à la composante du champ électrique à cet endroit sur l'axe Oz puisque le vecteur de surface est selon cet axe, dirigé vers le haut. Or, cette surface est à la coordonnée $z+dz$. Si on appelle $E_z(z+dz)$ cette composante, le flux à travers la surface horizontale supérieure devient :

$$E_z(z+dz).dx.dy$$

puisque l'aire de cette surface est le produit $dx.dy$. Par ailleurs, le vecteur de surface est vertical dirigé vers le haut. Le signe de ce flux à travers la surface horizontale supérieure est ainsi donné par le signe de la composante sur l'axe [illegible] du champ électrique localisé à cet endroit. Il convient d'adjoindre à ce flux élémentaire, celui à travers la surface horizontale inférieure. Il vient aisément que ce second flux s'écrit :

$$-E_z(z).dx.dy$$

parce qu'il faut considérer la composante du champ électrique, toujours sur l'axe $dx.dy.dz$ mais ici à la coordonnée z . Enfin, le signe négatif provient du fait que le vecteur de surface pour cette surface horizontale inférieure est vertical mais orientée vers le bas.

Finalement, le flux à travers la paire de surfaces horizontales s'écrit :

$$E_z(z+dz).dx.dy - E_z(z).dx.dy$$

En faisant un développement de cette différence au premier ordre, on obtient :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z}.dz.dx.dy$$

Il reste à compléter par les deux autres paires de surface pour obtenir le flux élémentaire à travers la surface élémentaire fermée. Le calcul se poursuit de façon analogue en identifiant pour chaque paire de faces, quele composante du champ est à considérer et à quelle coordonnée. On montre ou on admet qu'on trouve le flux total à travers la surface fermée comme étant :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}.dx.dy.dz + \frac{\partial E_y}{\partial y}.dy.dx.dz + \frac{\partial E_z}{\partial z}.dz.dx.dy$$

Il reste, pour obtenir la divergence, à diviser par le volume élémentaire qui est simplement le produit $dx.dy.dz$ puisqu'il s'agit d'un parallélépipède rectangle. Finalement,

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Pour les expressions de la divergence en coordonnées cylindriques et sphériques, on se reportera aux formulaires.

4. Equation locale de la conservation de la charge

On peut faire un retour sur la conservation de la charge du chapitre 1 puisque l'équation de conservation mettait en jeu le flux de la densité de courant à travers une surface macroscopique selon la figure 2.6.

On rappelle l'équation de conservation :

$$I = \oiint_S \vec{j}.\vec{dS} = -\frac{dQ}{dt}$$

qu'on avait interprétée comme suit : le bilan net du transfert de charges à travers une surface (la différence entre ce qui entre et ce qui sort) est égal à la variation de la quantité de charges contenue dans le volume délimité par cette surface. Les charges ne s'évanouissent pas dans la nature pas plus qu'elles n'apparaissent ex nihilo. Autrement dit, la charge se conserve.

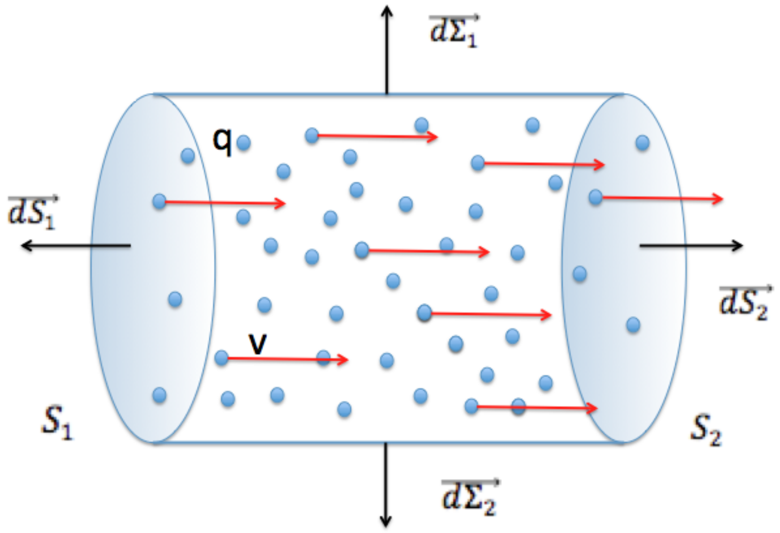

Fig. 2.6 : équation de conservation de la charge pour une surface macroscopique.

Toutefois, dans le bilan qui correspond à la surface macroscopique de la figure 1.10, on ne peut savoir où est localisé le taux de variation de charge (le second membre). D'où l'opération de fragmenation du volume macroscopique en volumes infinitésimaux qui conduit à la définition de la divergence. Concrètement, on divise les deux membres de l'éuqtion de conservation par le volume intérieur et on fait tendre ce volume vers 0. Il vient,

$$\lim_{V \to 0} \frac{\oiint_S \vec{j} . \overrightarrow{dS}}{V} = \lim_{V \to 0} - \frac{dQ}{V . dt}$$

soit finalement :

$$\mathrm{div}\, \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \mathrm{div}\, \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

qui est l'équation locale de conservation de la charge.

C'est l'équation de conservation la plus générale qu'on puisse imaginer. Elle est locale parce qu'elle est vraie en tout point de l'espace, le point étant défini comme point de convergence du processus de contraction du volume intérieur à une surface fermée de Gauss jusqu'à un point mathématique. Enfin, dans le second membre, figure la dérivée par rapport au temps de la densité de charge en ce point. Dans le cas le plus général, les grandeurs ont une dépendance spatio-temporelle et l'équation peut être comprise comme une forme à la fois locale (un point de l'espace) et instantanée (un point sur l'axe du temps).