Chapitre 1

Modèle microscopique de conduction, intégrale de flux, conservation de la charge

1. Modèle microscopique de courant électrique

On considère dans ce paragraphe le modèle le plus élémentaire possible du courant électrique. Il s'agit de particules microscopiques appelées porteurs de charges (les électrons libres dans le réseau cristallographique d'un conducteur macroscopique en cuivre, par exemple) qui ont toutes le même vecteur vitesse uniforme parallèle à l'axe du conducteur selon la figure 1.1 ci-dessous.
On note N , la densité volumique des porteurs ; q , la charge électrique commune des porteurs ; $\vec{v}$, le vecteur vitesse commun uniforme des porteurs et S , la section circulaire du conducteur.

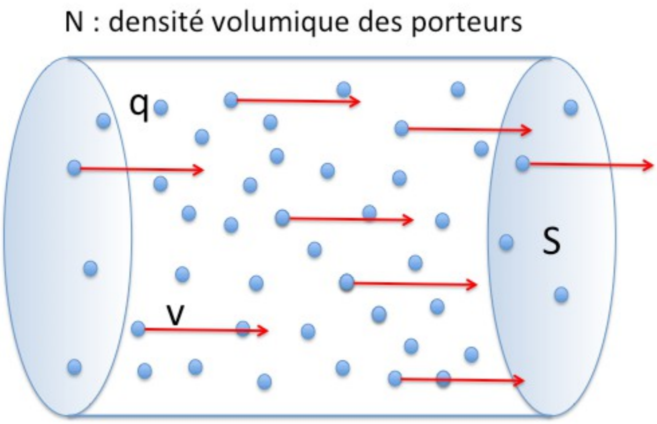

Fig. 1.1 : modèle microscopique du courant électrique. On n'a représenté que quelques vecteurs vitesse.

Par définition, l'intensité du courant électrique est le débit de charge en $C.s^{-1}$. Il est défini par la quantité de charge qui traverse une section droite du conducteur (par exemple, la surface circulaire à droite notée ΔQ) pendant un temps ΔT , divisé par ce temps, soit :

$$I=\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Dans notre modèle élémentaire, le courant est constant parce que l'écoulement de charges est permanent. En revanche, dans le cadre d'un modèle plus réaliste (cf. *infra*), on définira le courant instantané en faisant tendre ΔT vers zéro.

Pour déterminer l'intensité du courant électrique en fonction des paramètres de l'écoulement, on adopte la démarche suivante : on se place en face de la section droite (la surface à droite par exemple) et on déclenche un chronomètre à $t=0$ pendant le temps ΔT . On compte la quantité de charge ΔQ qui traverse cette section droite pendant ce temps ΔT et il reste à faire le rapport des deux grandeurs. Les charges dans le voisinage immédiat de la section droite située à gauche traversent la surface très rapidement. Les charges situées à gauche à la distances $L=v.\Delta T$ ont les dernières à traverser la surface juste avant l'arrêt du chronomètre. Ainsi, les charges qui auront finalement traversé la surface S sont dans le cylindre de surface S et de longueur $L=v\Delta T$, soit de volume $v\Delta T S$. Pour déterminer le nombre de porteurs qui ont traversé, il convient de multiplier ce volume par la densité volumique de porteurs, soit N et pour obtenir la charge électrique totale, il reste à multiplier ce nombre par la charge électrique élémentaire des porteurs, soit q . Finalement :

$$I=\frac{Nqv\Delta T S}{\Delta T}=NqvS$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la formule est bien homogène à un courant en $C.s^{-1}$ c'est à dire en Ampère.

2. Densité de courant électrique, flux de la densité de courant

Il faut toutefois complexifier un peu le modèle pour décrire une réalité plus riche et plus complexe. La première hypothèse à laquelle il faut renoncer est celle d'un écoulement à vecteur vitesse uniforme. En réalité, il faut admettre que le vecteur vitesse au niveau de la section droite pour laquelle on détermine le courant électrique est quelconque. Plus précisément, le mouvement d'un porteur est la superposition du mouvement brownien lié à l'agitation thermique à vitesse dite de Fermi, de moyenne nulle et d'une vitesse dite de dérive. En l'absence de champ électrique, les porteurs ne se déplacent que selon le mouvement brownien, leur mouvement global est nul et il n'en résulte pas de courant électrique. En présence d'un champ électrique, à ce mouvement brownien, s'ajoute une vitesse de dérive qui est proportionnelle au champ électrique. Toutefois, cette vitesse de dérive n'a aucune raison, dans le cas le plus général, d'être uniforme dans la totalité du volume dans lequel les porteurs se déplacent. Dans la suite de l'étude, la vitesse envisagée correspond à cette vitesse de dérive. La formule du paragraphe précédent peut ainsi être adaptée à cette nouvelle situation. On ne peut plus se contenter de multiplier le vecteur vitesse $\vec{v}$ supposé uniforme avec la surface macroscopique S . Au lieu de cela, il convient de considérer le courant total comme superposition de contributions élémentaires, ce qui est une technique classique. On découpe donc la surface macroscopique en surfaces élémentaires. La surface étant de géométrie circulaire, il est naturel de la découper moyennant des variations infinitésimales des coordonnées polaires, bien que pour les équations de principe, cela ne soit pas absolument indispensable. Il résulte de ce découpage une surface élémentaire, infiniment petite d'ordre 2, d'aire :

$$dS=r\,dr\,d\theta$$

Cette surface élémentaire apparaît en vert hachuré sur le schéma de la figure 1.2 pour laquelle, comme précédemment, on n'a représenté que quelques vecteurs vitesse pour la lisibilité.

La question est à présent de savoir dans quelle mesure les porteurs qui traversent la surface macroscopique à cet endroit contribuent au courant électrique. Pour ce faire, on peut réfléchir à différentes situations typiques. Le porteur traverse la surface d'autant plus aisément que son vecteur vitesse est proche de l'axe du conducteur (pensez à un panneau photovoltaïque qu'on oriente normal au flux de photons pour obtenir un rendement maximal). A la limite, si le vecteur vitesse est dans le plan de la surface, il ne traverse pas et ne contribue pas au courant macroscopique.

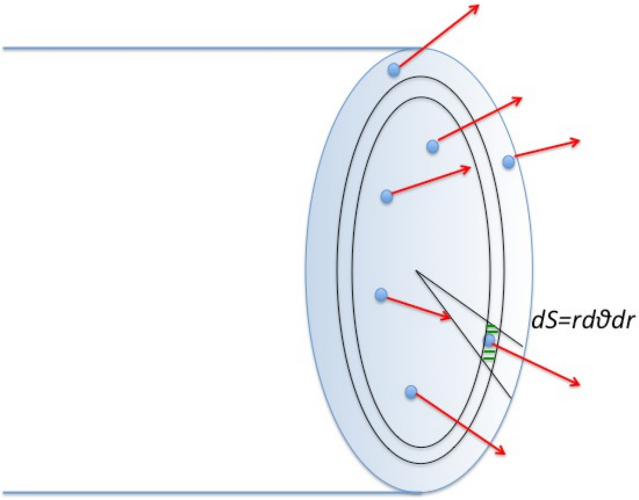

Fig. 1.2 : découpage de la surface macroscopique en surface élémentaire.

Au terme de l'analyse des différentes configurations pour tous les vecteurs vitesse imaginables, on peut tirer les conclusions suivantes : le porteur ne contribue que s'il possède une composante non nulle sur l'axe du conducteur, soit l'axe horizontal sur nos schémas. Cela suggère l'utilisation du produit scalaire. Quantitativement, on définit le vecteur de surface $\overrightarrow{dS}$ comme suit : il est localement normal à la surface élémentaire, de norme l'aire élémentaire de la surface. La surface macroscopique est une surface ouverte en ce sens qu'elle est incapable d'enfermer un volume qui retiendrait un fluide. C'est une surface virtuelle ou de pensée, imaginée en ce sens qu'elle ne correspond pas à une surface physique, de matière. Dans la suite du texte, nous appellerons ce type de surface, une surface virtuelle. En tant que surface ouverte, le sens du vecteur de surface est arbitraire. Pour la direction localement normale, on a deux possibilités. Le choix de l'une de ces deux possibilités correspond à ce qu'on appelle orientation de la surface. Quand on passe d'un sens à l'autre ou autrement dit, d'une orientation à l'autre, toutes choses égales par ailleurs, le produit scalaire change de signe. Dans notre problème, la surface macroscopique est un disque. C'est donc une surface plane. Les surfaces élémentaires le sont également et les vecteurs de surface sont donc tous perpendiculaires au plan du disque. Mais dans le cas général, on peut aussi définir une surface macroscopique et donc, une surface élémentaire non plane, auquel cas, le vecteur de surface est normal en ce sens qu'il est perpendiculaire au plan localement tangent à la surface élémentaire. Nous reviendrons sur ce cas plus général plus loin. La figure 1.3 illustre tous les éléments qui permettent de déterminer la contribution d'un élément de surface : la surface élémentaire hachurée en vert, son vecteur de surface en bleu et le vecteur vitesse des porteurs de charge en cette position de la surface élémentaire.

Le courant élémentaire, contribution locale au courant total de cette surface élémentaire est donné par :

$$dI = Nq\,\vec{v}\,\overrightarrow{dS}$$

et le courant total qui traverse la surface macroscopique est donné par la somme étendue à toutes les surfaces élémentaires qui construisent la surface macroscopique des courants élémentaires. La surface élémentaire étant un infiniment petit d'ordre 2, il vient que le courant total est donné par une intégrale de surface selon :

$$I=\iint_S Nq\,\vec{v}\,\vec{dS}$$

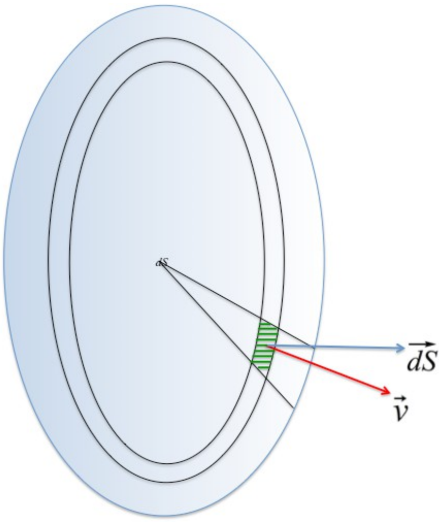

Fig. 1.3 : surface élémentaire, vecteur vitesse local et vecteur de surface.

On appelle densité de courant, le vecteur $\vec{j}=Nq\,\vec{v}$ si bien que le courant qui traverse la section droite du conducteur s'écrit :

$$I=\iint_S \vec{j}\,\vec{dS}$$

qui définit l'intégrale de flux de la densité de courant à travers la surface macroscopique S .

Enfin, on peut montrer dans le cadre d'un modèle de comportement microscopique, que la densité de courant obéit à la loi d'Ohm locale qui s'écrit :

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}$$

où σ est la conductivité du métal avec $\sigma=\frac{1}{\rho}$ où ρ est la résistivité du métal conducteur.

Ces relations appellent différentes remarques :

Du point de vue de l'analyse dimensionnelle, la densité de courant s'exprime en $A.m^{-2}$. Le courant total s'obtient par une intégrale de flux (soit une intégrale surfacique) d'où la dimension de la grandeur. Néanmoins, dans le modèle étudié, il s'agit d'une densité de courant volumique dans la mesure où les porteurs s'écoulent effectivement dans le volume du conducteur. Il existe des situations (notamment pour des courants variables à haute fréquence) pour lesquelles les porteurs qui participent au courant sont confinés en surface. On parlera alors de densité de courant surfacique. Mais dans les deux cas, le courant total s'obtient par une intégrale de flux, c'est à dire, une intégrale de surface. Dans le cas de notre modèle étudié, le courant total est obtenu par intégrale de flux à travers la surface S de la figure 1.1 qui est perpendiculaire à l'axe du cylindre et les porteurs s'écoulent dans la totalité du volume intérieur du cylindre tandis que dans le cas de courants surfaciques, le courant total s'obtiendrait toujours par calcul de l'intégrale de flux à travers S mais avec des porteurs qui ne s'écouleraient que le long de la surface latérale du cylindre.

Dans notre modèle, nous avons calculé le courant total par calcul de l'intégrale de flux à travers S, section droite et plane du cylindre. Les vecteurs élémentaires de surface, $\overrightarrow{dS}$ sont donc colinéaires, horizontaux. Dans le principe, rien ne s'oppose à définir une intégrale de flux à travers une surface non plane comme le suggère la figure 1.4. L'intégrale de flux se calcule sur le principe comme suit : on découpe la surface macroscopique en surfaces élémentaires, on détermine pour chaque surface élémentaire le vecteur de surface défini par son module qui vaut l'aire de cette surface élémentaire, sa direction qui est normale au plan localement tangent à la surface élémentaire et dont le sens est choisi conventionnellement et arbitrairement.

La notion d'intégrale de flux dépasse largement la problématique du transport de charges électriques. En mécanique des fluides, le courant électrique est remplacé par le débit massique si on remplace la charge électrique des porteurs par la masse élémentaire des particules fluides. Il est recommandé de réfléchir aux analogies formelles qui peuvent exister avec la mécanique des fluides parce que ces phénomènes faciles à se représenter apportent beaucoup pour la compréhension des phénomènes de conduction électrique.

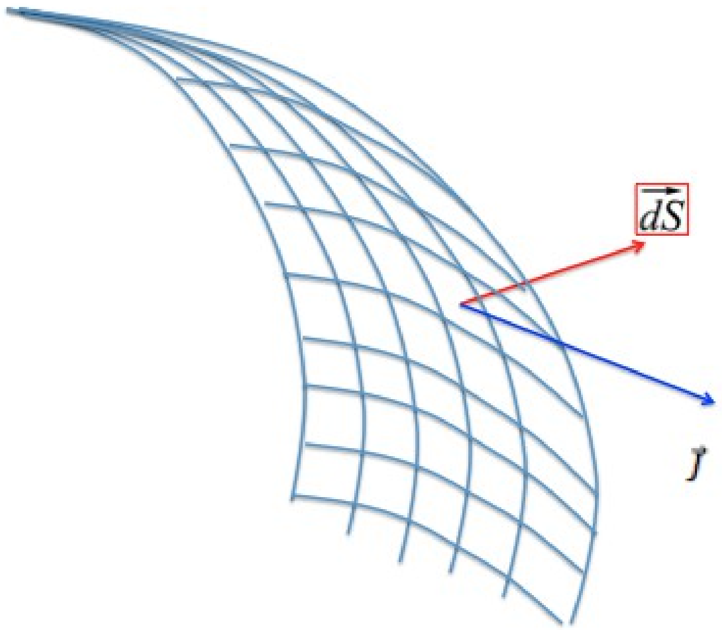

Fig. 1.4 : surface non plane, type voile de navire. On calcule localement, pour chaque surface élémentaire, le produit scalaire $\vec{j}\,\overrightarrow{dS}$ *puis on somme toutes les contributions sur la surface macroscopique.*

3. Conservation de la charge.

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons considéré le flux de porteurs à travers une surface virtuelle ouverte, la surface S, section droite du cylindre du conducteur. Nous définissons à présent un nouvel objet, cas particulier de l'intégrale de flux qui joue un rôle important ; il s'agit de l'intégrale de flux à travers une surface virtuelle fermée. Pour ce faire, nous commençons par définir une telle surface fermée, au sens trivial du terme. La surface virtuelle est fermée si une surface physique c'est-à-dire de matière et de même géométrie, était capable d'enfermer et de retenir un fluide, de l'air ou de l'eau, par exemple. La section droite du cylindre des paragraphes précédents n'est manifestement pas une telle surface. On en obtient une dans notre modèle microscopique de conduction de courant en choisissant une portion du cylindre fermée par deux sections droites, respectivement S_1 et S_2 . La surface fermée, notée dorénavant S, est ainsi constituée de la portion de paroi latérale du cylindre (qu'on notera Σ) fermée par les deux « couvercles » que sont les deux sections droites S_1 et S_2 , comme une boîte de conserve. La figure 1.5 illustre une telle surface fermée de géométrie classique et importante. En tant que surface macroscopique, si nous voulons calculer une intégrale de flux à travers cette surface, il nous faut l'orienter. Dans les paragraphes précédents, l'orientation des surfaces (en l'occurrence S) était conventionnelle (elle dépendait d'une convention de celui qui fait l'acte d'orientation) et arbitraire, en ce sens qu'il faisait comme bon lui semblait. Pour les surfaces fermées, l'orientation reste conventionnelle mais perd son caractère arbitraire dans la mesure où la convention universelle qu'on trouve dans tous les ouvrages consiste à orienter depuis l'intérieur de la surface vers l'extérieur.

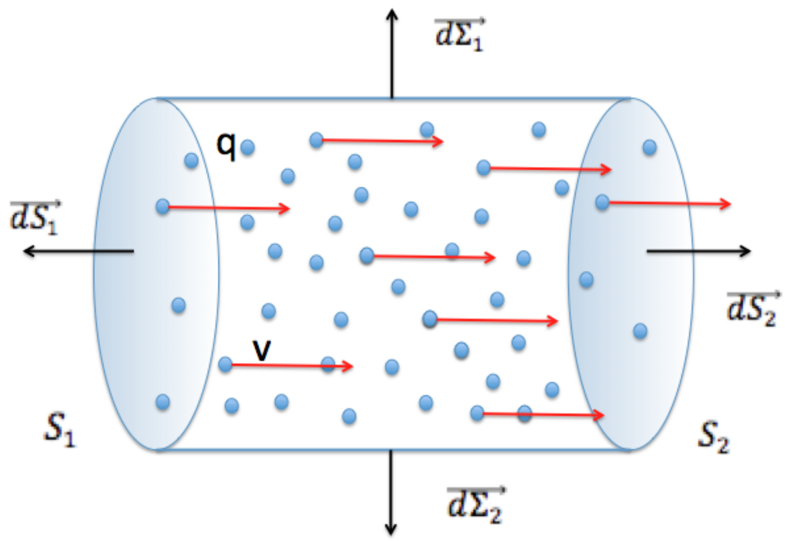

Fig. 1.5 : surface fermée de type « boîte de conserve » formée par la paroi latérale Σ du cylindre fermée par les deux couvercles S_1 et S_2 . On a représenté pour chaque section droite ou « couvercle » un vecteur de surface particulier et noté respectivement $\overrightarrow{dS_1}$ et $\overrightarrow{dS_2}$. La surface Σ est non plane et pour chaque point sur cette surface, le vecteur de

surface est radial et on a représenté deux tels vecteurs de surface, respectivement $\overrightarrow{d\Sigma_1}$ *et* $\overrightarrow{d\Sigma_2}$ *.*

Nous pouvons à présent calculer l'intégrale de flux de la densité de courant à travers cette surface fermée dont on remarquera la notation particulière :

$$I = \oiint_S \vec{j}\,\overrightarrow{dS}$$

qu'on décompose comme suit :

$$I = \iint_{S_1} \vec{j}\,\overrightarrow{dS} + \iint_{\Sigma} \vec{j}\,\overrightarrow{dS} + \iint_{S_2} \vec{j}\,\overrightarrow{dS}$$

L'intégrale de flux à travers la paroi latérale, la surface Σ , est nulle si les charges s'écoulent dans le volume du conducteur. Concrètement, les porteurs n'ont jamais un vecteur vitesse avec une composante différente de zéro sur les vecteurs de surface radiaux de la paroi latérale du cylindre. Pensez à l'analogie avec la mécanique des fluides. Si le tuyau est parfaitement étanche, le flux de fluide à travers la paroi PVC, par exemple, du tuyau est nul sans quoi le tuyau fuirait. L'intégrale de flux que nous cherchons à calculer est donc réduite au flux des porteurs à travers les deux sections droites S_1 et S_2 , soit :

$$I = \iint_{S_1} \vec{j}\,\overrightarrow{dS} + \iint_{S_2} \vec{j}\,\overrightarrow{dS}$$

La première situation qu'on peut imaginer est la suivante : il y a autant de charges qui entrent par la gauche que de charges qui sortent par la droite. Cela conduit à :

$$I = \iint_{S_1} \vec{j}\,\overrightarrow{dS} + \iint_{S_2} \vec{j}\,\overrightarrow{dS} = 0$$

parce que les deux flux qui composent l'intégrale sont égaux et opposés. Précisons ce point. Faisons l'hypothèse de charges positives pour simplifier un peu le raisonnement même si on sait qu'en réalité les porteurs mobiles dans un conducteur de cuivre sont les électrons. Nous faisons aussi l'hypothèse de notre modèle hyper simplifié du paragraphe 1.1. dans lequel tous les porteurs ont même vecteur vitesse. On vérifiera aisément que le résultat du raisonnement est identique même dans le cas d'un champ de vitesses plus complexe. Les densités de courant sont donc identiques pour les deux sections S_1 et S_2 . Pourquoi les deux flux sont-ils donc opposés puisque les densités de courant sont les mêmes. C'est en raison de l'orientation des surfaces. Dans la convention, les surfaces sont orientées depuis le volume intérieur enfermé par la surface vers l'extérieur. Les contributions $\vec{j}\,\overrightarrow{dS}$ sont donc négatives pour S_1 à gauche tandis qu'elles sont égales en valeur absolue mais positives pour S_2 à droite. En bilan net, la somme est nulle. Comment est-ce que cela se traduit pour la population de porteurs dans le volume intérieur ? Rappelons-nous qu'il y a autant de porteurs qui entrent à gauche que de porteurs qui sortent à droite. Nous sommes ici dans une problématique très classique des équations bilan qu'on retrouve souvent en physique mais également en économie. Si mes récettes sont supérieures à mes dépenses, mon épargne augmente mais si mes recettes sont inférieures à mes dépenses, mon épargne diminue. En régime permanent, les recettes coïncident exactement aux dépenses et l'épargne est inchangée. Ici, en terme de charge électrique totale enfermée dans le volume, on obtient l'équation de conservation de la charge :

$$I = \oiint_S \vec{j}\,\vec{dS} = -\frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

ou encore,

$$I = \oiint_S \vec{j}\,\vec{dS} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

si on fait tendre la durée vers 0.

Il faut comprendre cette équation comme suit : le courant électrique à travers la surface S fermée qu'on détermine par l'intégrale de flux de la densité de courant à travers la surface fermée est égal au taux de variation de la charge électrique située dans le volume intérieur délimitée par la surface. Dans notre modèle de conduction, ce taux de variation est non nul si, par exemple, on ralentit les charges en S_2 auquel cas, il en rentre plus à gauche qu'il en sort à droite, auquel cas, les charges s'accumulent dans le volume intérieur. Il reste à expliquer le signe négatif qui ne tombe pas forcément sous le sens. Pour comprendre pourquoi il faut mettre un moins dans cette équation de conservation, nous réfléchissons sur la situation de notre modèle simpliste pour lequel, on a ralenti les charges à droite, en S_2 . La densité de courant est donc plus petite en S_2 qu'en S_1 . Les contributions $\vec{j}\,\vec{dS}$ sont donc plus négatives à gauche qu'elles ne sont positives à droite et il en résulte un courant I net négatif.

$$I = \oiint_S \vec{j}\,\vec{dS} < 0$$

Mais nous avons fait l'hypothèse de charges positives qui entrent par la gauche plus vite qu'elles ne s'évacuent par la droite. Il y a donc accumulation de charges positives dans le volume délimité par la surface. La charge électrique enfermée croît, le taux de variation est positif. Courant négatif, taux de variation positif, on équilibre avec le signe négatif. Il faut bien insister sur le fait que ce signe négatif résulte de la convention d'orientation de la surface pour une surface fermée de l'intérieur du volume vers l'extérieur.

Cette équation peut encore être comprise comme suit : le bilan net de charges entrant dans le volume intérieur, délimité par la surface ne peut disparaître comme par enchantement comme des charges ne peuvent y apparaître crées ex nihilo. Ce bilan net se retrouve intégralement en taux de variation de la charge totale enfermée dans le volume. C'est donc une équation de conservation de la charge : les charges ne disparaissent pas ni n'apparaissent spontanément du vide. La charge se conserve. C'est une équation intégrale ou macroscopique en ce sens que surface et volume sont aussi grands qu'on veut. Nous verrons au chapitre suivant une forme locale de cette équation.