

Évaluation TP3

Durée : 1h15

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Seule la feuille avec les commandes python et vos codes de TP sont autorisés.
Répondre aux questions théoriques sur une feuille séparée.

Exercice 1

Le défenseur d'une région a pour but d'intercepter d'éventuels missiles. Il dispose de radars relevant les positions de missiles ennemis et doit prévoir leur trajectoire pour les intercepter. Ses radars révèlent les positions suivantes d'un missile

x_i	0	250	500	750	1000
y_i	0	8	15	19	20

Les x_i désignent la distance au sol sur une trajectoire directe, et les y_i l'altitude du missile. Ces valeurs sont exprimées en kilomètres. On suppose aussi que ce défenseur possède un très bon service de renseignements qui aura pu lui confirmer que la trajectoire des missiles est parabolique. Elle satisfait donc une équation de la forme

$$y_i = a + bx_i + cx_i^2, \quad i = 1, \dots, 5.$$

On a donc plus d'équations que d'inconnues. On souhaite résoudre ce problème au sens des moindres carrés.

1. Ecrire le problème sous la forme de la recherche d'un minimum d'une fonction $\mathcal{J}(a, b, c)$ qu'on identifiera.
2. Calculer $\nabla \mathcal{J}(a, b, c) = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial a}, \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial b}, \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial c} \right)$.
3. Résoudre $\nabla \mathcal{J}(a, b, c) = 0$.
4. On se donne (a_0, b_0, c_0) et $\rho = 1e - 5$. Coder l'algorithme :

$$(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = (a_n, b_n, c_n) - \rho \nabla \mathcal{J}(a_n, b_n, c_n).$$

5. Vers quoi converge cet algorithme ? Donner une valeur approchée des paramètres a, b, c recherchés.

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. On choisit $n = 20$: utiliser les boîtes noires de numpy pour calculer la plus grande et la plus petite valeur propre de A en module (celles-ci serviront de valeur de référence)
2. Programmer la méthode de la puissance et enregistrer les valeurs approchées de la plus grande valeur propre.

3. Illustrer la vitesse de convergence de la méthode.
4. Programmer la méthode de la puissance inverse et enregistrer les valeurs approchées de la plus petite valeur propre de A .
5. Illustrer la vitesse de convergence de la méthode de la puissance inverse.
6. Calculer numériquement la valeur propre de A la plus proche de 2.