Problème 1
Solution
Première partie
1) a) On a :

$$F - \lambda J_{n-1,n} = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & . & . & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & . & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$\det(F - \lambda J_{n-1,n}) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^n$$

Le déterminant étant non nul, la matrice est inversible.

b) On va procéder par récurrence sur n.
Si $n = 2, r = 0$ ou 1.
Si $r = 0$, toute matrice de $GL_2(\mathbb{C})$ convient.
Si $r = 1$,

$$J_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - \lambda J_{1,2} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\det(M - \lambda J_{1,2}) = -1$$

donc la matrice $M - \lambda J_{1,2}$ est inversible pour tout λ appartenant à $\mathbb{C}$.
Faisons l'hypothèse de récurrence :
$\forall\, r, \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq n-1, \exists\, M \in M_{n-1}(\mathbb{C}), M - \lambda J_{r,n-1} \in GL_{n-1}(\mathbb{C}), \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$
On pose alors :

$$M' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M' - \lambda J_{r,n} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} J_{r,,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} M - \lambda J_{r,n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\det(M' - \lambda J_{r,n}) = \det(M - \lambda J_{r,n-1})$$

qui est non nul pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, par hypothèse de récurrence.

c) Soit A une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ de rang r.

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On va considérer f comme une application linéaire de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ et on va faire deux changements de base différents, suivant que $\mathbb{C}^n$ est considéré comme espace de départ ou espace d'arrivée.

On désigne par F un sous-espace vectoriel supplémentaire de $Ker(f)$ et par $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r, \epsilon_{r+1}, \ldots, \epsilon_n)$ une base adaptée à la décomposition en somme directe :

$$\mathbb{C}^n = F \oplus Ker(f)$$

La restriction de f à F, qui est un supplémentaire de son noyau, est injective, donc $(f(\epsilon_1), \ldots, f(\epsilon_r))$ est une famille libre.

D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de $\mathbb{C}^n$:

$$(f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \ldots, f(\epsilon_r), \eta_1, \ldots, \eta_{n-r})$$

La matrice de l'application linéaire f dans les bases $(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r, \epsilon_{r+1}, \ldots, \epsilon_n)$ et

$(f(\epsilon_1), f(\epsilon_2), \ldots, f(\epsilon_r), \eta_1, \ldots, \eta_{n-r})$ est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deux matrices d'une même application linéaire dans des bases différentes sont équivalentes, ce qui donne le résultat demandé.

d) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, de rang $r, 0 \leq r \leq n-1$.

D'après la question précédente, il existe deux matrices P et Q , appartenant à $GL_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$A = QJ_{r,n}P$$

D'après la question b), il existe une matrice M' telle que la matrice $M' - \lambda J_{r,n}$ soitinversible, pour tout$\lambda \in \mathbb{C}$.

On pose alors :

$$M = QM'P$$

On a :

$$M - \lambda A = QM'P - \lambda QJ_{r,n}P$$

$$= Q(M' - \lambda J_{r,n})P$$

La matrice $M' - \lambda J_{r,n}$ est inversible, pout tout $\lambda \in \mathbb{C}$, les matrices P et Q sont inversibles, donc la matrice $Q(M' - \lambda J_{r,n})P$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

2) a) Puisqu'on est sur un espace vectoriel complexe, le polynôme caractéristique de A aura au moins une racine λ, ce qui entraîne que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

b) Soit u un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $u(Gl_n(\mathbb{C})) \subset Gl_n(\mathbb{C})$.

Soit A une matrice non inversible de rang $r < n$.

D'après la question 1)d), il existe une matrice $M \in Gl_n(\mathbb{C})$ telle que $M - \lambda A \in Gl_n(\mathbb{C})$, pour tout nombre complexe λ. On a :

$$u(M - \lambda A) = u(M) - \lambda u(A)$$

Supposons $u(A) \in Gl_n(\mathbb{C})$. On a alors :

$$u(M - \lambda A) = (u(A))^{-1}((u(A)u(M) - \lambda I_n))$$

ce qui entraîne :

$$u(A)u(M) - \lambda I_n \in Gl_n(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

ce qui est faux d'après la question précédente.
On en conclut :

$$u(A) \notin Gl_n(\mathbb{C})$$

c) On a :

$$N' - \lambda J_{r,n} = Diag(\lambda_1 - \lambda, \dots \lambda_r - \lambda, 1, \dots, 1)$$

qui n'est pas inversible si et seulement si $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, de rang r.
D'après la question 1)c), il existe deux matrices inversibles P et Q telles que :

$$A = PJ_{r,n}Q$$

On pose :

$$N = PN'Q$$

On a :

$$N - \lambda A = PN'Q - \lambda PJ_{r,n}Q$$

$$= P(N' - \lambda J_{r,n})Q$$

La matrice $N - \lambda A$ est inversible si et seulement si la matrice $N' - \lambda J_{r,n}$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

d) D'après la question b), $N - \lambda A \notin GL_n(\mathbb{C})$ entraîne $u(N - \lambda A) \notin GL_n(\mathbb{C})$.
Donc, par linéarité de u:

$$\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \Rightarrow u(N) - \lambda u(A) \notin GL_n(\mathbb{C})$$

La matrice N est inversible, il en est donc de même de la matrice $u(N)$.
On en déduit :

$$\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \Rightarrow u(N)(I_n - \lambda(u(N)^{-1}u(A)) \notin GL_n(\mathbb{C})$$

il en résulte :

$$\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \Rightarrow I_n - \lambda(u(N)^{-1}u(A) \notin GL_n(\mathbb{C})$$

$I_n - \lambda_i(u(N)^{-1}u(A) \notin GL_n(\mathbb{C})$ entraîne, puisque λ_i est non nul :

$$\frac{1}{\lambda_i}I_n - (u(N))^{-1}u(A) \notin GL_n(\mathbb{C})$$

ce qui est équivalent à $\frac{1}{\lambda_i}$ valeur propre de $(u(N))^{-1}u(A)$.

La matrice $(u(N))^{-1}u(A)$ a r valeurs propres non nulles (éventuellement comptées avec leur multiplicités), donc :

$$rang((u(N))^{-1}u(A)) \geq r$$

La matrice $(u(N))^{-1}$ étant inversible, $rang((u(N))^{-1}u(A) = rang(u(A))$, donc :

$$rang(u(A)) \geq rang(A)$$

e) Si la matrice A est inversible, il en est de même de la matrice $u(A)$, donc A de rand $n\psi$entraîne $u(A)$ de rang n.

Si $A \in Ker(u), u(A) = 0_{M_n(\mathbb{C})}$ donc $rang(u(A)) = 0$.

On déduit alors de la question précédente que $rang(A) = 0$, donc que $A = 0_{M_n(\mathbb{C})}$.

Il en résulte que u est injectif, et, u étant un endomorphisme, u est bijectif.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Il existe $B \in GL_n(\mathbb{C}), u(B) = A$.

On a alors $u^{-1}(A) = B$, donc $u^{-1}(A) \in GL_n(\mathbb{C})$.

u^{-1} vérifie $u^{-1}(GL_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$, ce qui entraîne, d'après la question précédente :

$$\forall\, M \in M_n(\mathbb{C}), rang(u^{-1}(M)) \geq rang(M)$$

En particulier :

$$rang(u^{-1}(u(A))) \geq rang(u(A))$$

donc :

$$rang(A) \geq rang(u(A))$$

On a démontré l'inégalité inverse à la question précédente, donc :

$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{C}), rang(A) = rang(u(A))$$

Deuxième partie

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, de rang r.

On désigne par al'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$, on désigne par u l'endomorphisme de matrice X dans la base canonique

de $\mathbb{C}^n$.

$$\phi_A(X) = 0_{M_n(\mathbb{C})} \Leftrightarrow AX = 0_{M_n(\mathbb{C})}$$

$$\Leftrightarrow a \circ u = 0_{L(\mathbb{C}^n)}$$

$$\Leftrightarrow Im(u) \subset Ker(a)$$

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-r})$ une base de $Ker(A)$, complétée, par le théorème de la base incomplète, en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}, \ldots e_n)$ de $\mathbb{C}^n$.La matrice de u dans cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} u_{11} & . & . & . & . & u_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ u_{n-11} & . & . & . & . & u_{n-rn} \\ 0 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

Le sous-espace vectoriel $\{u \in L(\mathbb{C}^n), a \circ u = 0_{L(\mathbb{C}^n)}\}$ est donc isomorphe au sous-espace

vectoriel des matrice à $n-r$ lignes et $r$colonnes qui est de dimension $n(n-r) = n^2 - nr$.

Par ailleurs, $Ker(\phi_A)$ est isomorphe à $\{u \in L(\mathbb{C}^n), a \circ u = 0_{L(\mathbb{C}^n)}\}$, donc :

$$Ker(\phi_A) = n^2 - nr$$

et finalement :

$$rang(\phi_A) = nr$$

Pour tout $X \in M_n(\mathbb{C}^n)$:

$$\Theta \circ \phi_A \circ \Theta(X) = \Theta \circ \phi_A({}^tX)$$

$$= \Theta(A^tX)$$

$$=^t (A^tX)$$

$$= X^tA$$

$$= \psi_A(X)$$

On en déduit :

$$\psi_A = \Theta \circ \phi_A \circ \Theta$$

L'application Θ étant bijective :

$$rang(\phi_A) = rang(\psi_A)$$

et finalement :

$$rang(\psi_A) = nr$$

2) a) On a :

$$\phi_A(E_{11}) = AE_{11}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & 0 \\ a_{21} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} E_{i1}$$

$$\phi_A(E_{1j}) = AE_{1j}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & . & 0 & a_{1j} & 0 & . & 0 \\ 0 & . & 0 & a_{2j} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & a_{ij} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & a_{nj} & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$$

Cas général ;

$$AE_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} E_{kl} E_{ij}$$

On vérifie par un produit matriciel que :

$$E_{kl} E_{ij} = \delta_{li} E_{kj}$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $l = i$ et à 0dans le cas contraire.
Cela donne :

$$AE_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj}$$

On en déduit que la matrice de ϕ_A dans la base

$$(E_{11}, E_{1,2}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{nn})$$

est :

$$Diag(A, \ldots, A)$$

matrice carrée d'ordre n^2 formée de blocs diagonaux égaux à A.
De même, la matrice de ψ_A est :

$$Diag({}^tA, \ldots, {}^t A)$$

b)

$$P_{\phi_A}(\lambda) = Det(\lambda I_{n^2} - Diag(A, \ldots, A))$$

$$= Det(Diag(\lambda I_n - A, \ldots, \lambda I_n - A)$$

Par un calcul de déterminant par blocs, on obtient :

$$P_{\phi_A}(\lambda) = (Det(\lambda I_n - A))^n$$

$$= (P_A(\lambda))^n$$

De même, puisque A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique :

$$P_{\psi_A}(\lambda) = (P_A(\lambda))^n$$

c) Désignons par Φ_A la matrice de ϕ_A.
Soit P un polynôme annulateur de A.

$$P(\Phi_A) = P(Diag(A, \ldots, A))$$

$$= Diag(P(A), \ldots, P(A))$$

$$= 0_{M_{n^2}(\mathbb{C})}$$

puisque

$$P(A) = 0_{M_n(\mathbb{C})}$$

Par ailleurs l'endomorphisme $P(\phi_A)$ a pour matrice $P(\Phi_A)$ donc :

$$P(\phi_A) = 0_{L(\mathbb{C}^n)}$$

On démontre de même :

$$P(\psi_A) = 0_{L(\mathbb{C}^n)}$$

3) Supposons que la matrice A est diagonalisable et désignons par a l'endomorphisme de $\mathbb{C}$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Il existe une base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de a est

$$Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Désignons par ϵ_{ij} l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice E_{ij} dans la base B.
On a :

$$\eta_A(\epsilon_{ij}) = a \circ \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij} \circ a$$

donc la matrice de $\eta_A(\epsilon_{ij})$ dans la base B est :

$$Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)E_{ij} - E_{ij}Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

et un calcul matriciel montre que cette matrice est égale à

$$(\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$$

On en déduit :

$$\eta_A(\epsilon_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)\epsilon_{ij}$$

Puisque

$$(E_{11}, E_{1,2}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{nn})$$

est une base de $M_n(\mathbb{C})$,

$$(\epsilon_{11}, \epsilon_{1,2}, \dots, \epsilon_{1n}, \epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{2n}, \dots, \epsilon_{nn})$$

est une base de $L(\mathbb{C}^n)$ et l'égalité

$$\eta_A(\epsilon_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)\epsilon_{ij}$$

montre que cette base est formée de vecteurs propres des l'endomorphisme η_A de $\mathbb{C}^n$ qui est donc diagonalisable.

4) Si un endomophisme $u$de $\mathbb{C}^n$ appartient à $Ker(\eta_A)$, on a :

$$a \circ u - u \circ a = 0_{L(\mathbb{C}^n)}$$

autrement dit a et $u$commutent, ce qui entraîne que les sous-espaces propres de a sont stables par u.

Réciproquement, supposons que $u \in L(\mathbb{C}^n)$ et que tous les sous-espaces propres de a sont stables par u.

Puisque la matrice A est diagonalisable, l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des sous-espaces propres de a.

Posons $Spec(a) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$,
Soit $x \in \mathbb{C}^n$.
$x = \sum_{k=1}^{p} x_i$, $x_i \in E_{\lambda_i}$
Puisque $u(x_i) \in E_{\lambda_i}$, $a \circ u(x_i) = a(u(x_i)) = \lambda u(x_i)$
Par ailleurs, $u \circ a(x_i) = u(a(x_i)) = u(\lambda_i x_i) = \lambda_i u(x_i)$.
On en déduit que $\eta_A(u)(x_i) = 0_{\mathbb{C}^n}, \forall\, i, 1 \leq i \leq p$, ce qui entraîne

$$\eta_A(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}, \forall\, x \in \mathbb{C}^n$$

d'où :

$$\eta_A(u) = 0_{L(\mathbb{C}^n)}$$

On a démontré :
$u \in Ker(\eta_A) \Leftrightarrow$ Tout sous-espace propre de A est stable par u.Un élément de $Ker(\eta_A)$ est donc défini de manière unique par la donnée de

p endomorphismes $(u_1, \dots, u_p)$, $u_i \in L(E_{\lambda_i}), \forall\, i, 1 \leq i \leq p$.On en déduit :

$Ker(\eta_A)$ isomorphe à $\oplus_{i=1}^{p} L(E_{\lambda_i}) = \oplus_{i=1}^{p} Ker(\lambda I_n - A))$
D'où :

$$dim(Ker(\eta_A) = \sum_{\lambda \in Spec(A)} (dim(Ker(\lambda I_n - A)))^2$$

Troisième partie

1) a) Les polynômes $(x-\lambda_i)^{q_i}$et $(x-\lambda_j)^{q_j}$ n'ont aucune racine complexe en commun, donc ils sont premiers entres eux.

Il résulte donc directement du théorème de décomposition des noyaux :

$\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^{p} Ker(u-\lambda I_n)^{q_i}$

b) Les endomorphismes u et $id_{\mathbb{C}^n}$ commutent, donc on peut développer

$(u-\lambda id_{\mathbb{C}^n})^{q_i}$ avec la formule du binôme de Newton. Il en résulte que

$(u-\lambda id_{\mathbb{C}^n})^{q_i}$ est unpolynôme de l'endomorphisme u, donc commute avec

u.

Si deux endomorphismes commutent, le noyau de l'un est stable par l'autre, donc

$Ker((u-\lambda id_{\mathbb{C}^n})^{q_i})$ est stable par u.

2) a) On part de l'égalité : $\dfrac{1}{\mu_u(x)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{Q_i(x)}{(x-\lambda_i)^{q_i}}$

En multipliant les deux membres par $\mu_u(x)$, on obtient :

$$1 = \sum_{i=1}^{p} Q_i(x) \frac{\mu_u(x)}{(x-\lambda_i)^{q_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \pi_i(x) Q_i(x)$$

En passant aux polynômes d'endomorphismes appliqués à l'endomorphisme u, on obtient :

$$id_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{p} \pi_i(u) \circ Q_i(u)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E_j$$

b) Les endomorphismes $\pi_j(u), \pi_k(u), Q_j(u)$ et $Q_k(u)$ sont des polynômes en u, donc ils commutent. On a donc :

$$E_j \circ E_k = \pi_j(u) \circ \pi(u) \circ Q_j(u) \circ Q_k(u)$$

On a :

$$\pi_j(x)\pi_k(x) = \frac{\mu_u(x)}{(x-\lambda_j)^{q_j}} \frac{\mu_u(x)}{(x-\lambda_k)^{q_k}}$$

On suppose que $j \neq k$.
$(\mu_u(x))^2 = \mu_u(x)(x-\lambda_j)^{q_j}(x-\lambda_k)^{q_k} \prod_{i=1,i\neq j,i\neq k}^{p}(x-\lambda_i)^{q_i}$
donc :

$$\pi_j(x)\pi_k(x) = \mu_u(x) \prod_{i=1,i\neq j,i\neq k}^{p} (x-\lambda_i)^{q_i}$$

Il en résulte :

$$E_j \circ E_k = \mu_u(u) \circ \prod_{i=1,i\neq j,i\neq k}^{p} (u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{q_i} \circ Q_j(u) \circ Q_k(u)$$

$$= 0_{L(\mathbb{C}^n)}$$

puisque $\mu_u(u) = 0_{L(\mathbb{C}^n)}$.

c) D'après la question a) :

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = id_{\mathbb{C}^n}$$

En composant les deux membres par E_j, on a :

$$E_j = \sum_{i=1}^{p} E_i \circ E_j$$

et d'après la question précédente, tous les termes de la sommes d'indice différent de j sont nuls, donc :

$$E_j \circ E_j = E_j$$

3) Soit T le polynôme défini par :

$$T(x) = (x-\lambda_i)^{q_i} Q_i(x)\pi_i(x)$$

Puisque $(x-\lambda_i)^{q_i}\pi_i(x) = \mu_u(x)$, le polynôme T est un multiple de μ_u, donc
:

$$T(u) = 0_{L(\mathbb{C}^n)}$$

Soit $x \in Im(E_i)$.

$$x = E_i(y) = \pi_i(u) \circ Q_i(u)(y), y \in \mathbb{C}^n$$

On a donc :

$$(u - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{q_i}(x) = T(u)(y) = 0_{\mathbb{C}^n}$$

On en déduit :

$$Im(E_i) \subset Ker((u - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{q_i}$$

L'égalité

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = id_{\mathbb{C}^n}$$

entraîne :

$$\forall\, x \in \mathbb{C}^n, x = \sum_{i=1}^{p} E_i(x)$$

Puisque :

$$\forall\, i, 1 \leq i \leq p, E_i(x) \in Im(E_i)$$

On a :

$$\mathbb{C}^n = +_{i=1}^{p} Im(E_i)$$

Par ailleurs :

$$\mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^{p} Ker((u - \lambda id_{\mathbb{C}})^{q_i})$$

ce qui entraîne que la somme $+_{i=1}^{p} Im(E_i)$ est directe.
On pose :

$$\alpha_i = dim(Im(E_i)), \beta_i = dim(Ker((u - \lambda id_{\mathbb{C}})^{q_i})$$

On a :

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \sum_{i=1}^{p} \beta_i = n$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i - \alpha_i = 0$$

et de plus :

$$\beta_i - \alpha_i \geq 0$$

On en déduit :

$$\forall\, i, 1 \leq i \leq p, \alpha_i = \beta_i$$

et avec l'inclusion :

$$Im(E_i) \subset Ker((u - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{q_i}$$

on en déduit :

$$Im(E_i) = Ker((u - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{q_i}$$

4) On pose :

$$D = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i E_i, N = \sum_{i=1}^{p} (u - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n}) \circ E_i$$

Les endomorphismes D et N sont des polynômes d'un même endomorphisme, donc ils commutent.

Démontrons que D est diagonalisable.

Soit $x \in Im(E_j), x = E_j(y)$.

$$D(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_j E_j(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i E_j \circ E_i(y)$$

$$= \lambda_j E_j(y)$$

$$= \lambda_j x$$

On en déduit que λ_j est valeur propre de D et que le sous-espace propre associé contient

$Im(E_j)$.

Puisque $\mathbb{C}^n$ est la sommes directe des sous-espaces vectoriels $Im(E_i)$, il estégalement la somme des sous-espaces propres de D qui est donc diagonalisable.

$$N^q = (\sum_{i=1}^{p}(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})\circ E_i)^q$$

On va démontrer par récurrence :

$$(\sum_{i=1}^{p}(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})\circ E_i)^q = \sum_{i=1}^{p}(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^q \circ E_i$$

La propriété est vraie pour $q = 1$.
On suppose :

$$(\sum_{i=1}^{p}(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})\circ E_i)^q = \sum_{i=1}^{p}(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^q \circ E_i$$

$$(\sum_{i=1}^{p}(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})\circ E_i)^{q+1} = (\sum_{i=1}^{p}(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^q\circ E_i)\circ(\sum_{j=1}^{p}(u-\lambda_j id_{\mathbb{C}^n})\circ E_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^q\circ E_i\circ(u-\lambda_j id_{\mathbb{C}^n})\circ E_j$$

Tous les endomorphismes qui interviennent sont des polynômes de l'endomorphisme u, donc ils commutent. On a donc :

$$(\sum_{i=1}^{p}(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})\circ E_i)^{q+1} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{q+1}\circ E_i\circ E_j$$

$$= \sum_{i=1}^{p}(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{q+1}\circ E_i$$

$$(u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^q\circ E_i = (u-\lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^q\circ\pi_i(u)\circ Q_i(u)$$

$$(x-\lambda_i)\circ\pi_i(x)\circ Q_i(x) = (x-\lambda_i)^q\frac{\mu_u(x)}{(x-\lambda_i)^{q_i}}Q_i(x)$$

Si $q \geq q_i$, le polynôme $(x-\lambda_i)\circ\pi_i(x)\circ Q_i(x)$ est un multiple de μ_u donc est un polynôme annulareur de u.

Donc si $q \geq \underset{1 \leq i \leq p}{Max} q^i$, on a :

$$\forall\, i, 1 \leq i \leq p, (u - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^q = 0_{L(\mathbb{C}^n)}$$

ce qui entraîne :

$$N^q = 0_{L(\mathbb{C}^n)}$$

On a enfin :

$$D + N = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i E_i + \sum_{i=1}^{p} (u - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n}) \circ E_i$$

$$= \sum_{i=1}^{p} u \circ E_i$$

$$= u$$

Il reste à démontrer l'unicité :

Supposons qu'il existe deux couples (D, N) et (D_1, N_1) vérifiant les conditions précédentes.

On a :

$$u = D + N = D_1 + N_1$$

d'où :

$$D - D_1 = N_1 - N$$

Par ailleurs :

$$D_1 \circ u = D_1 \circ D_1 + D_1 \circ N_1$$

$$= D_1 \circ D_1 + N_1 \circ D_1$$

$$= D_1 \circ u$$

Donc D_1 commute avec u et, avec la même démonstration, il en est de même de N_1.

Cela entraîne que D_1 et N_1 commutent avec D et N, qui sont des polynômes en u.

D_1 et D sont des endomorphismes diagonalisables qui commutent, donc ils sont simultanément diagonalisables, ce qui entraîne que $D - D_1$ est diagonalisable.

Puisque N et N_1 sont nilpotents et commutent, $N_1 - N$ est nilpotent.

On en déduit que $N_1 - N$ est nul, puisqu'il est à la fois diagonalisable et nilpotent.

Cela entraîne :

$$N = N_1,$$

puis :

$$D_1 = D$$

ce qui démontre l'unicité.

Quatrième partie

1) On déduit du petit théorème de Jordan qu'il existe une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N qui commutent, telles que $A = D + N$.

D'après la définition de D dans la partie précédente, A et D ont le même spectre.

Soit $\lambda \in Spec(A)$ et $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX = \lambda X$.

On a, par une récurrence immédiate :

$$A^k X = \lambda^k X$$

Par hypothèse,

$$\underset{k \longrightarrow +\infty}{Lim} A^k = I_n$$

donc :

$$\underset{k \longrightarrow +\infty}{Lim} A^k X = X$$

cela entraîne :

$$\underset{k \longrightarrow +\infty}{Lim} \lambda^k X = X$$

puisque X est un vecteur propre, il est non nul, donc :

$$\underset{k \longrightarrow +\infty}{Lim} \lambda^k = 1$$

Si $|\lambda| > 1$, $\underset{k \longrightarrow +\infty}{Lim} |\lambda^k| = +\infty$ et si $|\lambda| < 1$, $\underset{k \longrightarrow +\infty}{Lim} |\lambda|^k = 0$.

Cela entraîne $|\lambda| = 1$, donc $\lambda = e^{i\theta}$.

D'après le résultat admis, $\lambda = 1$.

La matrice D est diagonalisable et admet 1 pour seule valeur propre, donc $D = I_n$.

On en déduit :

$$A = I_n + N$$

Désignons par s l'indice de nilpotence de N, c'est-à-dire :

$$N^s = 0_{M_n(\mathbb{C})}, N^{s-1} \neq 0_{M_n(\mathbb{C})}$$

Avec la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$A^k = (I_n + N)^k$$

$$= I_n + \sum_{j=1}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) N^j$$

Si $k \geq s$:

$$A^k = I_n + \sum_{j=1}^{s-1} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) N^j$$

On a donc :

$$\begin{array}{c} Lim \\ k \to +\infty \end{array} \sum_{j=1}^{s-1} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) N^j = 0_{M_n(\mathbb{C})}$$