Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on désigne par $M_n(\mathbb{C})$ **l'ensemble** des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Pour tout entier r tel que $0 \leq r \leq n$, on note $J_{r,n}$ la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où I_r désigne la matrice identité d'ordre r.

En particulier, $J_{0,n}$ est la matrice nulle et $J_{n,n}$ la matrice identité d'ordre n.
On désigne par $F = (f_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice telle que :

- $f_{1n} = 1$
- $\forall\, i, 2 \leq i \leq n, f_{ii-1} = 1$
- Tous les autres coefficients sont nuls.

Première partie

1) a) Démontrer que :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C}, F - \lambda J_{n-1,n} \in GL_n(\mathbb{C})$$

b) Démontrer que :

$$\forall\, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq n-1, \exists\, M \in GL_n(\mathbb{C}), M - \lambda J_{r,n} \in GL_n(\mathbb{C}), \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

c) Démontrer que toute matrice de rang r est équivalente à la matrice $J_{n,r}$.

d) Déduire des résultats précédents :

$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{C}), rang(A) = r, 0 \leq r \leq n, \exists\, M \in GL_n(\mathbb{C}), M - \lambda A \in GL_n(\mathbb{C}), \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$$

2) On désigne par u un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ et on suppose :

$$u(GL_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$$

a) On désigne par A une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{C})$, peut-on avoir :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{C}, A - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{C})$$

b) On suppose A de rang $r, 0 \leq r \leq n-1$, démontrer :

$$u(A) \notin GL_n(\mathbb{C})$$

(on pourra utiliser la question 1) d) et raisonner par l'absurde).
On désigne par $\lambda, \ldots, \lambda_r$ des nombres complexes non nuls.

c) On désigne par N' la matrice $Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 1, \ldots, 1)$.
Pour quelles valeurs de λ la matrice $N' - \lambda J_{r,n}$ est-elle inversible ?

On suppose que $A \notin GL_n(\mathbb{C})$.
Démontrer qu'il existe $N \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $N - \lambda A \notin GL_n(\mathbb{C})$ pour exactement r valeurs complexes non nulles de λ.

d) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, de rang $r, 0 \leq r \leq n-1$ et $N \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$N - \lambda A \notin GL_n(\mathbb{C}), \forall \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r\} \subset \mathbb{C}^*$$

On pose $B = [u(N)]^{-1}u(A)$.
Démontrer que les nombres complexes $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_r}$ sont des valeurs propres de B.
En déduire :

$$rang(u(A)) \geq rang(A)$$

e) Démontrer que u est bijective et en déduire :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), rang(u(A)) = rang(A)$$

Deuxième partie :
On désigne par A un élément fixé de $M_n(\mathbb{C})$ et on désigne par ϕ_A, ψ_A et η_A les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ définis par :
$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$:
$\phi_A(X) = AX$
$\psi_A(X) = XA$
$\eta_A(X) = AX - XA$
On désignera également par ϕ_A, ψ_A et η_A les endomorphismes correspondants sur $L(\mathbb{C}^n)$, espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$.
Par exemple, si a est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$:

$$\forall u \in L(\mathbb{C}^n), \phi_a(u) = a \circ u$$

1) Déterminer une relation entre le rang de A et le rang de ϕ_A.
En utilisant l'endomorphisme Θ de $M_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \Theta(M) =^t M$$

déterminer le rang de ψ_A en fonction de celui de A.

2) On désigne par E_{ij} l'élément de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en ligne i et colonne j qui est égal à 1.
On désigne par B la base de $M_n(\mathbb{C})$:

$$(E_{11}, E_{1,2}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{nn})$$

a) Déterminer les matrices des endomorphismes ϕ_A et ψ_A dans la base précédente.

b) Comparer les polynômes caractéristiques de A, ϕ_A et ψ_A.

c) On désigne par P un polynôme annulateur de A.

Démontrer que P est un polynôme annulateur des endomorphismes ϕ_A et ψ_A.

3) On suppose la matrice A diagonalisable.
Démontrer qu'il en est de même de l'endomorphisme η_A.
Il est conseillé de raisonner sur les endomorphismes plutôt que sur les matrices. On pourra, en se plaçant dans une base convenable, utiliser les endomorphismes ϵ_{ij} de matrices E_{ij}.

4) On suppose la matrice A diagonalisable, établir la formule :

$$dim(Ker(\eta_A)) = \sum_{\lambda \in Spec(A)} (dim(Ker(\lambda I_n - A)))^2$$

Troisième partie : Petit théorème de Jordan
Soit u en endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, on admet l'existence d'un unique polynôme normalisé μ_u (c'est-à-dire de coefficient dominant 1), annulateur de u, tel que
l'ensemble des polynômes annulateurs de u soit l'ensemble des multiples de μ_u.
On désigne le spectre de u par $\{\lambda_1, \ldots ; \lambda_p\}$ et on admet que μ_u a une expression de la forme :

$$\mu_u(x) = (x - \lambda_1)^{q_1}(x - \lambda_2)^{q_2} \ldots (x - \lambda_p)^{q_p}, q_{i \geq 1}, \forall\, i, 1 \leq i \leq p$$

1) a) Démontrer que $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des sous-espaces vectoriels $Ker((u - \lambda id_{\mathbb{C}})^{q_i})$, i variant de 1 à p.

b) Démontrer que les sous-espaces vectoriels $Ker((u - \lambda id_{\mathbb{C}^n})^{q_i})$ sont stables par u.

2) On définit des polynômes $Q_i, 1 \leq i \leq p$, par :

$$\frac{1}{\mu_u(x)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{Q_i(x)}{(x - \lambda_i)^{q_i}}$$

On désigne par π_i le polynôme défini par :

$$\pi_i(x) = \frac{\mu_u(x)}{(x - \lambda_i)^{q_i}}$$

et on pose :

$$E_i = \pi_i(u) \circ Q_i(u)$$

Démontrer que :
a) $\sum_{i=1}^{p} E_i = id_{\mathbb{C}^n}$

b) Pour tout couple (j, k) d'entiers naturels distincts compris entre 1 et p :

$$E_j \circ E_k = 0_{L(\mathbb{C}^n)}$$

c) Pour tout entier naturel j compris entre 1 et p :

$$E_j \circ E_j = E_j$$

3) Démontrer que :

$$\forall\, i, 1 \leq i \leq p, Im(E_i) = Ker((u - \lambda_i id_{\mathbb{C}^n})^{q_i}$$

4) Déduire des résultats précédents le petit théorème de Jordan :
Pour tout endomorphisme u sur $\mathbb{C}^n$, il existe un unique couple (D, N) d'endomorphismes tel que :
- $D \circ N = N \circ D$
- D est diagonalisable
- N est nilpotent
- $u = D + N$