Corrections TD M2S4 : Autour de la réduite de Jordan

Exercice 1.

Nous avons le polynôme minimal de M donc ses valeurs propres sont 2 et 3. De plus M n'est pas diagonalisale car son polynôme minimal admet une racine double. 2 est de multiplicité 1 dans μ_A donc l'ordre du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre 2 est 1, de même l'ordre du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre 3 est 2 ainsi une réduite de Jordan à l'ordre près des facteurs est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

1. Commençons par calculer le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = A = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 3 & 4 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -2 & -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la troisième colonne, nous obtenons :

$$\chi_A(\lambda) = 4 \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + (\lambda - 3) \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 3 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = 4(-2 + 2\lambda) + (\lambda - 3)[\lambda(\lambda + 2) - 3]$$

$$\chi_A(\lambda) = 8(\lambda - 1) + (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 3)$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(8 + \lambda^2 - 9) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

2. Le polynôme minimal de A a les mêmes racines que le polynôme caractéristique et il divise le polynôme caractéristique : soit $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ et $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$, en calculant $(A - I)(A + I) \neq 0$ nous en déduisons que $\mu_A = \chi_A$.
3. Ansi une réduite de Jordan (à l'ordre près des facteurs) est puisque nous avons 1 comme valeur propre racine de multiplicité 2 dans χ_A d'où le premier sous bloc de Jordan et -1 racine de multiplicité 1 de χ_A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

1. Les matrices A et B étant semblables elles ont le même polynôme caractéristique : donc 2 est la seule valeur propre de A.
2. La matrice B n'est pas diagonalisable puisque B représente déjà la réduite de Jordan de B, comme A et B sont semblables nous en déduisons que A n'est pas diagonalisable.
3. La dimension de $Ker(A-2I)$ est donnée par le nombre de blocs de Jordan associé à 2 : à savoir ici deux blocs de Jordan. Nous pouvons aussi justifier ce résultat en caculant

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   cette matrice est de rang 3 donc d'après le théorème du rang nous retrouvons le fait que $dim(Ker(A-2I)) = 2$
4. L'ordre du plus grand bloc de Jordan associé à la matrice B est 3 : par conséquent la multiplicité de 2 en tant que racine du polynôme caractéristique est 3, ainsi comme 2 est l'unique valeur propre nous avons $\mu_A(X) = (X-2)^3$.

Exercice 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X-1)^4$, le polynôme minimal a les mêmes racines que le polynôme caractéristique et le divise donc : soit $\mu_A = (X-1)$ ce qui impliquerait $A = I$ car μ_A est un polynôme annulateur donc cas exclu, soit $\mu_A = (X-1)^2$ ou $(X-1)^3$ ou $(X-1)^4$. Caculons à cet effet :

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^3 = 0$$

, par conséquent le polynôme minimal étant un polynôme annulateur nous en déduisons que $\mu_A = (X-1)^3$, la seule valeur propre est donc 1 et le plus grand bloc de Jordan est de taille 3 car l'ordre de multiplicité de 1 dans μ_A, ainsi une réduite de Jordan à l'ordre près des facteurs est :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$