TD M2S3 : Autour du théorème de Cayley Hamilton

Exercice 1.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_2 = 0$
3. En déduire que A est inversible et une expression de A^{-1}.

Exercice 2.

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^3 = u$. Montrer que u est diagonalisable. Quelles sont les valeurs propres possibles de u ?
2. Déterminer les endomorphismes v de E tel que $v^3 = v$ et $v^4 = 3v^3 - 2v^2 + 6v$.

Exercice 3.

Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 3$ qui annulent le polynôme

$$P(X) = X(X-1)(X-3)$$

et dont le déterminant vaille 3.

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, et u un endomorphisme de E de rang 1. Montrer que si $Im(u) \subset Ker(u)$ alors u n'est pas diagonalisable.