Corrigé TD M2S3 : Autour du théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 1.

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = det(\lambda I_2 - A) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$
2. 1 est une racine évidente du polynôme Q, factorisons donc ce polynôme :

$$Q(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$$

ainsi

$$Q(X) = (X - 1)\chi_A(X)$$

D'après le théorème de Cayley Hamilton $\chi_A(A) = 0$ ainsi $Q(A) = 0$ donc

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_2 = 0$$

.

3. Par suite

$$A(\frac{A^2 - 6A + 11I_2}{6}) = (\frac{A^2 - 6A + 11I_2}{6})A = I_2$$

A est donc inversible et $A^{-1} = \dfrac{A^2 - 6A + 11I_2}{6}$.

Exercice 2.

1. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^3 = u$, le polynôme $P(X) = X^3 - X$ annule u. Or $P(X) = X(X - 1)(X + 1)$, ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$ et n'admet que des racines simples. Par conséquent u est diagonalisable et ses valeurs propres appartiennent à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$.
2. De la même façon, si v satisfait les hypothèses alors v annule le polynôme

$$P(X) = X(X - 1)(X + 1)$$

et le polynôme

$$Q(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 6X = X(X - 3)(X^2 + 2) = X(X - 3)(X^2 + 2).$$

L'endomorphisme v est diagonalisable d'après la question précédente, et ses valeurs propres appartiennent à la fois à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ des racines de P et à l'ensemble $\{0, 3\}$ des racines de Q. Donc la seule valeur propre de v est 0.

Comme v est diagonalisable, v est l'endomorphosme nul. Par conséquent, si v vérifie les hypothèses, alors v est nul.

La réciproque est vraie.

En définitive, le seul endomorphisme v satisfaisant les hypothèses est l'endomorphisme nul.

Exercice 3.

Si v est un endomorphisme qui satisfait aux hypothèses, alors v annule un polynôme scindé n'ayant que des racines simples, et par conséquent v est diagonalisable.
D'autre part, si λ est une valeur propre de v, λ est une racine de P, donc $\lambda \in \{0, 1, 3\}$.
Comme par hypothèse le déterminant de v vaut 3, la seule possibilité est la suivante : la matrice M de v dans une base de vecteurs propres $(e_i, 1 \leqslant i \leqslant n)$ est une matrice diagonale qui a pour expression (à l'ordre près des vecteurs de la base) :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, l'endomorphisme v répond à la question si et seulement si il existe une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$u(e_1) = 3e_1 \quad u(e_2) = e_2 ... u(e_n) = e_n$$

.

Exercice 4.

u est un endomorphisme de rang 1 donc d'après le théorème du rang nous avons

$$dim(Im(u)) = 1 \quad dim(Ker(u)) = n - 1.$$

$Im(u)$ est une droite vectoriele et $Ker(u)$ est un hyperplan. Deux cas sont alors à envisager :

1. Soit $Im(u) \cap Ker(u) = \emptyset$ dans ce cas ces deux sous espaces vecroriels sont en somme directe dans E. Alors on peut trouver une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E telle que e_1 soit une base de $Im(u)$ et $(e_2, ..., e_n)$ soit une base de $Ker(u)$. Or $u(e_1) \in Im(u)$ donc il existe λ non nul tel que $u(e_1) = \lambda e_1$ et $u(e_2) = u(e_3) = ... = u(e_n) = 0$. La matrice de u dans cette base s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

   . Donc dans ce cas u est diagonalisable.

2. Envisageons le deuxième cas à savoir $Im(u) \subset Ker(u)$: ainsi $\forall x \in E \quad u(x) \in Im(u)$, de l'inclusion $Im(u) \subset Ker(u)$ nous en déduisons $\forall x \in E \quad u(u(x)) = 0$ donc u^2 est l'endomorphisme nul. u annule donc le polynôme X^2. Les valeurs propres de u étant contenues dans les racines d'un polynôme annulateur, la seule valeur propre envisageable pour u est 0. Si u était diagonalisable, toutes ses valeurs propres seraient nulles et donc u serait nul : impossible car par hypothèse u est un endomorphisme de rang 1 donc u n'est pas diagonalisable.