TD M2S2 : Polynômes d'endomorphismes

Exercice 1.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J^2.
2. En déduire un polynôme annulateur noté P pour J.
3. Effectuer la division euclidienne du polynôme X^k pour $k \geqslant 2$ par le polynôme P. En déduire la valeur de J^k pour $k \geqslant 2$.

Exercice 2.

Considérons l'endomorphisme suivant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$$

qui a une matrice associe sa transposée.

1. Déterminer un polynôme annulateur pour f.
2. Déterminer les valeurs propres de f puis les sous-espaces propres de f.

Exercice 3.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n\mathbb{C}$ telle que

$$A^3 = 2A^2 - A.$$

Montrer que la trace de A est un entier naturel.

Exercice 4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 + A^2 + A = 0.$$

Montrer que $tr(A) \leqslant 0$.
