Corrigé TD M2S2 : Polynômes d'endomorphismes

Exercice 1.

1. Par produit matriciel nous obtenons $J^2 = nJ$.
2. Par conséquent le polynôme $X^2 - nX = X(X-n)$ est un polynôme annulateur de J ayant pour racines 0 et n.
3. Nous pouvons effecteur la division euclidienne de X^k pour $k \geqslant 2$ par $X^2 - nX$:

$$X^k = (X^2 - nX)Q(X) + R(X) \quad \text{avec} \quad deg(R) < 2$$

ainsi

$$X^k = (X^2 - nX)Q(X) + aX + b$$

Évaluons la relation ci dessus en 0, racine de P, nous obtenons ainsi $b = 0$ donc

$$X^k = (X^2 - nX)Q(X) + aX$$

Évaluons à nouveau la relation ci dessus en n l'autre racine de P ainsi nous obtenons $a = n^{k-1}$. Finalement nous obtenons pour $k \geqslant 2$: $X^k = P(X)Q(X) + n^{k-1}X$. Nous en déduisons comme $P(J) = 0$ que $J^k = n^{k-1}J$ pour $k \geqslant 2$.

Exercice 2.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(f(A)) = A$, par suite $f^2 = id$ donc le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur pour f.
2. D'après le cours le spectre de f est donc contenu dans $\{-1, 1\}$. Ananlysons l'inclusion réciproque : $f(A) = A \Leftrightarrow^t A = A \Leftrightarrow A \in S_n(\mathbb{R})$ où $S_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques réelles donc

$$SEP(f, 1) = S_n(\mathbb{R})$$

.

$f(A) = -A \Leftrightarrow^t A = -A \Leftrightarrow A \in A_n(\mathbb{R})$ où $A_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices antisymétriques réelles donc

$$SEP(f, -1) = A_n(\mathbb{R})$$

.

Exercice 3.

Le polynôme $X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de la matrice A par hypothèse. Factorisons ce polynôme $X(X^2 - 2X + 1) = X(X-1)^2$. D'après le cours nous savons que le spectre de A est contenu dans l'ensemble des racines de ce polynôme à savoir $0, 1$:

$$Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, 1\}.$$

Comme le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, A est trigonalisable et sa trace correspond à la somme des valeurs propres de A avec multiplicités ; donc $tr(A) \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

Rappelons que pour un polynôme à coefficients réels le complexe conjugué d'une racine est aussi racine et avec le même ordre de multiplicité.
Commençons par factoriser le polynôme $X^3+X^2+X = X(X^2+X+1) = X(X-j)(X-\bar{j})$. Comme A est une matrice à coefficients réels les ordres de multiplicité de j et de $\bar{j}$ dans le polynôme caractéristique de A sont égaux d'où les possibilités suivantes :

1. Cas 1
   (a) Valeur propre : 0
   (b) Ordre de multiplicité : 5
   (c) Trace : 0
2. Cas 2
   (a) Valeurs propres : $0, j, \bar{j}$
   (b) Ordres de multiplicité : $3, 1, 1$
   (c) Trace : $0*3+1*j+1*\bar{j} = -1$
3. Cas 3
   (a) Valeurs propres : $0, j, \bar{j}$
   (b) Ordres de multiplicité : $1, 2, 2$
   (c) Trace : $0*1+2*j+2*\bar{j} = -2$

En particulier nous obtenons $tr(A) \leqslant 0$.