TD M2S1 : Autour de la trigonalisation

Exercice 1.

Trigonaliser dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

Montrer que la matrice B ci dessous

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéritique P_f de f et en déduire que f n'est pas diagonalisable.
2. Pour toute valeur propre λ de f, calculer $(f - \lambda Id)^2$ et $(f - \lambda Id)^3$.
3. Montrer que si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = 0$, et x un élément de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^2(x) \neq 0$, alors $(u^2(x), u(x), x)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f soit triangulaire.

Exercice 4.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E. On suppose que f possède une unique valeur propre de multiplicité 3 notée a et que l'espace propre associé soit de dimension 2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit :

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$