Corrigé TD M2S1 : Autour de la trigonalisation

Exercice 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda+2 \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la troisième colonne nous obtenons le polynôme caractéristique de f :

$$P_f(\lambda) = (-1)^{3+3}(\lambda+2)det\begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 4 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda+2)[(\lambda-3)(\lambda+1)+4] == (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+1) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

.

1. <u>Sous espace propre associé à $\lambda_1 = -2$:</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,-2) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=-2x \\ -4x-y=-2y \\ 4x-8y-2z=-2z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-5x \\ y=4x \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

Il s'agit donc d'une droite vectorielle :

$$SEP(A,-2) = Vect((0,0,1)) = Vect(w)$$

2. <u>Sous espace propre associé à $\lambda_2 = 1$:</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,1) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=x \\ -4x-y=y \\ 4x-8y-2z=z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -2x \\ 20x - 3z = 0 \end{array} \right.$$

Il s'agit donc d'une droite vectorielle :

$$SEP(A,1) = Vect((3,-6,20)) = Vect(u)$$

3. Première façon de procéder
   A n'est pas diagonalisable puisque $dim(SEP(A,-1) \neq 2$ mais comme χ_A est scindé A est trigonalisable : ainsi il existe une base de $\mathbb{R}^3$ (v_1, v_2, v_3) telle que A soit semblable à

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en posant $v_1 = w$ et $v_2 = u$ les vecteurs propres préalablement trouvés et pour v_3 n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que (v_1, v_2, v_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple on choisit $v_3 = (1,0,0)$, ainsi

$$det(\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 20 & 0 \end{pmatrix}) = 6$$

donc la famille (v_1, v_2, v_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$ et comme $f(v_3) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, nous obtenons après résolution du système $f(v_3) = \dfrac{-28}{3} v_1 + \dfrac{2}{3} v_2 + v_3$ donc A est semblable à

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -28/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Autre façon de procéder
   En fait il existe une base de $\mathbb{R}^3$ (u, v, w) telle que A soit semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

avec u et w les vecteurs propres préalablement trouvés et v tel que (u, v, w) soit une base et tel que $f(v) = au + v \Leftrightarrow f(v) - v \in Vect(u)$.
On cherche donc un vecteur de coordonnées (x, y, z) tel que $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -4x - 2y \\ 4x - 8y - 3z \end{pmatrix}$ soit colinéaire à u.
Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ fonctionne car $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}$ et $det(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 0 \\ 20 & -8 & 1 \end{pmatrix}) \neq 0$.
Ainsi A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

notons f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est B.

$$\lambda I_3 - B = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 & 1 \\ -1 & \lambda + 2 & 1 \\ 2 & -6 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la troisième colonne, nous obtenons

$$\chi_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} -1 & \lambda + 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} - det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} + (\lambda - 3) det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = 6 - 2\lambda - 4 - (-6\lambda + 12 - 6) + (\lambda - 3)(\lambda^2 - 1) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$$

Recherchons maintenant le sous espace propre associé à la valeur propre 1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(B, 1) \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - z = x \\ x - 2y - z = y \\ -2x + 6y + 3z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(A, 1) \Leftrightarrow \{ \; x - 3y - z = 0$$

Il s'agit donc d'un plan vectoriel :

$$SEP(B, 1) = Vect(v_1, v_2) \quad v_1 = (1, 0, 1) \quad v_2 = (3, 1, 0)$$

Complétons cette famille de deux vecteurs pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ par exemple (v_1, v_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ avec $e_3 = (0, 0, 1)$ car

$$det(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1$$

.

$$f(e_3) = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, -1, 3)$$

Nous devons décomposer le vecteur de coordonnées $(-1, -1, 3)$ dans la base (v_1, v_2, e_3) :

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + ce_3$$

ce qui nous donne $a = 2 \quad b = -1 \quad c = 1$. Par suite, B est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

.

Finalement nous avons

$$f(v_1) = v_1 \quad f(v_2) = v_2 \quad f(e_3) = 2v_1 - v_2 + e_3$$

Posons $w = 2v_1 - v_2$ alors $f(w) = 2f(v_1) - f(v_2) = 2v_1 - v_2 = w$ et $f(e_3) = w + e_3$. La famille (v_1, w, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ car $det(\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & -1 & 0\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}) = 1$. Alors la matrice B est semblable à

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

.

Exercice 3.

1. $$A = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\4 & 4 & 0\\-2 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

   $$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\-4 & \lambda - 4 & 0\\2 & 2 & \lambda - 2\end{pmatrix}$$

   En développant par rapport à la troisième colonne nous obtenons le polynôme caractéristique de f :

   $$P_f(\lambda) = (-1)^{3+3}(\lambda - 2)det\begin{pmatrix}\lambda & 1\\-4 & \lambda - 4\end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^3$$

   .

   La seule valeur propre de f est donc 2. Si f était diagonalisable alors $f = 2Id$ ce qui n'est pas vrai donc f n'est pas diagonalisable.

2. L'endomorphisme $(f - \lambda Id)^2$ a pour matrice

   $$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\-4 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

   et l'endomorphisme $(f - \lambda Id)^3$ a pour matrice

   $$(A - 2I)^3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

3. Soient a,b,c des scalaires tels que
$$au^2(x) + bu(x) + cx = 0(1)$$
alors en composant par u
$$(1) \Rightarrow au^3(x) + bu^2(x) + cu(x) = 0$$
comme par hypothèse $u^3 = 0$, nous obtenons
$$(1) \Rightarrow bu^2(x) + cu(x) = 0$$
En composant à nouveau par u nous obtenons
$$(1) \Rightarrow bu^3(x) + cu^2(x) = 0$$
$$(1) \Rightarrow cu^2(x) = 0$$
Or par hypothèse $u^2(x) \neq 0$, par suite nous en déduisons $c = 0$ ce qui implique $bu^2(x) = 0$ donc $b = 0$ et finalement $a = u^2(x) = 0$ donc $a = 0$. Ainsi la famille $(x, u(x), u^2(x)$ est une famille libre de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3 c'est donc une base $\mathbb{R}^3$.
4. Définissons l'endomorphisme u par $u = f - 2Id$. Considérons le premier vecteur de la base canonique e_1. D'après la question précédente, comme $(f - 2Id)^3 = 0$ et en choisissant $x = e_1$, nous en déduisons donc que $((f - 2Id)^2(e_1), (f - 2Id)(e_1), e_1) = (u^2(e_1), u(e_1), e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et nous cherchons à déterminer la matrice de f relativement à cette base
$$f(e_1) = (f - 2Id)(e_1) + 2Id(e_1) = u(e_1) + 2e_1$$
$$f(u(e_1)) = (f-2Id+2Id)(u(e_1)) = (f-2Id)(u(e_1)+2Id(u(e_1)) = u(u(e_1))+2u(e_1) = u^2(e_1)+2u(e_1)$$
$$f(u^2(e_1)) = (f - 2Id)(u^2(e_1)) + 2Id(u^2(e_1) = u^3(e_1) + 2u^2(e_1) = 2u^2(e_1)$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

Comme la dimension du sous-espace propre, noté SEP, pour la valeur propre a vaut 2 : $dim(SEP(f, a)) = 2$ nous notons (v_1, v_2) une base de ce sous-espace propre ainsi $f(v_1) = av_1$ et $f(v_2) = av_2$. Complétons cette famille libre de deux vecteurs par un vecteur v_3 afin d'obtenir (v_1, v_2, v_3) une base $\mathbb{R}^3$, ainsi la matrice de f relativement à cette base s'exprime par
$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & \alpha \\ 0 & a & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$
Comme deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique nous en déduisons que $\gamma = a$. Ainsi $f(v_3) = \alpha v_1 + \beta v_2 + av_3$, posons alors $v_2^{'} = \alpha v_1 + \beta v_2$ ainsi $f(v_3) = v_2^{'} + av_3$.

$(\alpha, \beta) \neq (0,0)$: en effet si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ alors la matrice B serait diagonale : contradiction car f n'est pas diagonalisable puisque la dimension du sous espace propre n'est pas égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique. Donc $v_2^{'}$ est un vecteur non nul tel que par construction $f(v_2^{'}) = av_2^{'}$: c'est un vecteur non nul du sous espace propre de f que nous complétons en une base $(v_1^{'}, v_2^{'})$ de ce sous espace propre.
La famille $(v_1^{'}, v_2^{'}, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$: ces vecteurs ne sont pas coplanaires car v_3 n'appartient pas à $SEP(f,a)$: $f(v_3) \neq av_3$ car $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.
Ainsi la matrice de f relativement à la base $(v_1^{'}, v_2^{'}, v_3)$ est :

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$