Corrigé TD M1S3 :

Corrigé Exercice 1

1. Le polynôme caractéristique de f est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré $n \geqslant 1$ or $\mathbb{C}$ est un corps qui est algébriquement clos donc χ_f est scindé d'après le théorème d'Alembert. Ainsi f admet au moins une valeur propre notée λ et donc un vecteur propre noté x :
$$f(x) = \lambda x$$
.
2. Considérons ce vecteur x, alors
$$f(g(x)) = g(f(x))$$
puisque par hypothèse les endomorphismes f et g commutent, ainsi
$$f(g(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$
donc $g(x)$ est aussi un vecteur propre de f pour la valeur propre λ. En fait le sous espace propre de f pour la valeur propre λ note $SEP(f,\lambda)$ est stable par g car si $u \in SEP(f,\lambda)$ alors comme précédemment $g(u) \in SEP(f,\lambda)$.
3. Nous pouvons alors considérer la restriction de g à ce sous espace propre notée g_r. Mais alors g_r est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $SEP(f,\lambda)$, il admet donc au moins un vecteur propre y qui satisfait ainsi :
$$y \in SEP(f,\lambda) \quad \text{et} \quad g(y) = g_r(y) = \lambda y$$
.

Corrigé Exercice 2 :

VIDEO Corrigé Exo 2 M1S3

Si f et g commutent d'après l'exercice précédent alors les sous espaces propres de f sont stables par g.

Réciproquement supposons que g laisse stable tous les sous espaces propres de f , considérons un sous espace propre en particulier noté $SEP(f,\lambda)$ et $x \in SEP(f,\lambda)$:

- alors $g(x) \in SEP(f,\lambda)$ ainsi d'une part $f(g(x)) = \lambda g(x)$
- et d'autre part $g(f(x)) = g(\lambda x)) = \lambda g(x)$.

Ainsi pour
$$\forall y \in SEP(f,\lambda) \quad f(g(y) = g(f(y))$$
.
Maintenant comme f est diagonalisable, l'espace vectoriel E est somme directe des sous-espaces propres de f. Soit $u \in E$, écrivons alors $u = \sum_{i\in I} u_i$ avec $u_i \in SEP(f,\lambda_i)$ ainsi :
$$\forall i \in I \quad f(g(u_i)) = g(f(u_i))$$
nous en déduisons donc
$$\forall u \in E \quad f(g(u)) = g(f(u))$$
et donc que g et f commutent.

Corrigé Exercice 3 :
Notons A la matrice de f dans la base canonique de E. Comme f est nilpotent il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$A^p = 0_n.$$

D'autre part comme f est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PDP^{-1}.$$

Ainsi nous en déduisons que :

$$A^p = (PDP^{-1})^p = PD^pP^{-1} = 0 \Rightarrow D^p = 0_n.$$

Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de f comme

$$D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1^p \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\lambda_1^p = \lambda_2^p = ... = \lambda_n^p = 0.$$

Donc $\lambda_1^p = \lambda_2^p = ... = \lambda_n^p = 0$. puis $D = 0_n$ et donc $f = 0_E$

Corrigé Exercice 4 :

1. Notons (i, j) la base canonique du plan euclidien alors la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$ relativement à cette base est : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et les seuls sous espaces propres sont $\{0_E\}$ et E. En effet soit une droite vectorielle était stable cela impliquerait l'existence d'une valeur propre réelle. Dans la propriété ii) est vérifiée mais pas la propriété i).
2. Soit F un sous-espace de E que l'on peut choisir différent de E, stable par f et soit $(f_1, f_2, ..., f_p)$ une base de F. Comme f est diagonalisable il existe une base de E formée de vecteurs propres notés $(e_1, e_2, ..., e_n)$. D'après le théorème de la base incomplète il existe une base $((f_1, f_2, ..., f_p, e_{i_1}, ..., e_{i_n}$ de E obtenue en complétant les vecteurs de la famille libre $(f_1, f_2, ...f_p)$ à l'aide des vecteurs de la famille génératrice $(e_1, e_2, ..., e_n)$. Ainsi $G = Vect(e_{i_1}, ..., e_{i_n})$ est un supplémentaire de F dans E, et ce supplémentaire est stable par f car il est engendré par des vecteurs propres de f.
3. La démonstration de l'implication ci dessus reste valable sur $\mathbb{C}$. Il reste à montrer que ii) implique i)., ce que nous alons établir en raisonnant par l'absurbe. Supposons que ii) soit vérifiée mais que f ne soit pas diagonalisable. Notons $F = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} Ker(f - \lambda Id_E)$. Comme f n'est pas diagonalisable le sous espace F est un sous-espace différent de E, de plus étant constitué de sous-espaces propres de f il est stable par f , donc il existe un supplémentaire G de F qui est également stable par f. Notons g l'endomorphisme induit par f sur G. $G \neq \{0_E\}$, son polynôme caractéristique est un polynôme de degré supérieur ou égal à un. Sur $\mathbb{C}$ il admet au moins une racine, donc g admet au moins un vecteur propre x. Mais alors $x \in G \cap F$ et $x \neq 0_E$, ce qui vient contredire le fait que F et G sont supplementaires donc notre hypothèse est fausse et f est diagonalisable.