TD M1S2 : Autour du polynôme caractéristique

Exercice 1
Déterminer le polynôme caractéristique pour les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} i & 4i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Un argument d'Analyse
Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie impaire et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Justifier que χ_f admet au moins une racine réelle.
2. En déduire qu'il existe au moins une droite de E stable par f.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. Justifier qu'il existe λ' et $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que ${}^tAX' = \lambda' X'$.
4. Notons $H = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^tX'Y = 0\}$, justifier que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
5. En déduire qu'il existe un hyperplan stable par f.

Exercice 3 : Polynômes caractéristiques de AB et de BA
Soient $n, p \in \mathbb{N}^{\times}$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K), B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$:

1. Calculer les produits matriciels suivants :
$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ B & I_p \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0 & -\lambda I_p \end{pmatrix}$$
2. En déduire :
$$(-X)^n \chi_{BA} = (-X)^p \chi_{AB}.$$
3. En déduire :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K)^2 \quad \chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

Dr. Stéphanie REGLADE - Agrégée de mathématiques
INSA Centre Val de Loire

Exercice 4 : Matrice Compagnon

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, a_1, ..., a_{n-1}) \in K^n$,
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & .... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & .... & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & .... & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$ matrice carrée de taille n, montrer $\chi_A = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X_k$. On dit que A est la matrice-compagnon du polynôme unitaire $X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X_k$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^{n+1}$, $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\chi_A = P$.

Dr. Stéphanie REGLADE - Agrégée de mathématiques
INSA Centre Val de Loire