Corrigé TD M1S2

Corrigé exercice 1

- $\chi_A = (\lambda - 1)^2$
- $\chi_B = (\lambda - i)(\lambda + i) = \lambda^2 + 1$
- Par développement suivant la première ligne de $\lambda I - C$, nous obtenons :

$$\chi_C = \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & \lambda - 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_C = \lambda[(\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2] - [-3(\lambda - 1) + 2] + [-3 - (\lambda - 4)]$$

$$\chi_C = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2] + 3\lambda - 5 - \lambda + 1$$

$$\chi_C = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

VIDEO : Corrigé Exo 1 C M1S2

- Par développement suivant la première ligne $\lambda I - D$,

$$\chi_D = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & \lambda - 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_D = (\lambda - 1)[(\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2] - [-2\lambda + 2 + 2] + [-2 - \lambda + 4]$$

$$\chi_D = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) + (\lambda - 2)$$

$$\chi_D = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

$$\chi_D = (\lambda - 2)^3$$

- $\chi_E = \lambda(\lambda - 3)^2$

Corrigé exercice 2

1. χ_f est un polynôme réel de degré impair par suite il est contin.u Comme il est de coefficient dominant 1, il admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$: par le théorème des valeurs intermediaires il admet donc au moins un zéro réel.
2. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ tels que $f(x) = \lambda x$. Alors il existe une dorite vectorielle stable par f.
3. Le même raisonnement appliqué à ${}^tA$ au lieu de A montre qu'il existe λ' et $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que ${}^tAX' = \lambda' X'$.
4. H est le noyau de la forme linéaire $u : Y \to^t X'Y$, c'est donc un hyperplan.

5. Prouvons que cet hypeplan est stable par A : soit $Y \in H$ alors ${}^tX'(AY) =^t ({}^tAX')Y =^t (\lambda' X')Y = 0$ donc $AY \in H$. H est stable par A, l'hyperplan de E associé à H dans la base $\mathcal{B}$ est donc stable par f.

Corrigé exercice 3

En calculant les produits matriciels, nous obtenons les égalités suivantes dans $\mathcal{M}_{n+p}(K)$,

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ B & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - \lambda I_n & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0 & -\lambda I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda I_n & 0 \\ -B & BA - \lambda I_p \end{pmatrix}$$

d'où en passant aux déterminants $det(\lambda I_n - AB) = det \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix}$

$(-\lambda)^n det(BA - \lambda I_p) = (-1)^n (-\lambda)^p det \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix}$

Par suite

$$(-\lambda)^n \chi_{BA} = (-\lambda)^p \chi_{AB}.$$

Donc pour $n = p$, on a $\chi_{BA} = \chi_{AB}$.

Corrigé exercice 4

Pour $k \in \{0, ..., n-1\}$ notons

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & .... & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & .... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & .... & 0 & 1 \\ a_k & ... & ... & .... & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$ matrice carrée de taille $n-k$.

En développant le déterminant par rappport à la première ligne, nous obtenons n relations notées $[L_0], ..., [L_{n-1}]$:

$$\chi_A(x) = \chi_{A_0}(x) = x\chi_{A_1}(x) - a_0 \quad [L_0]$$

$$\chi_{A_1}(x) = x\chi_{A_2}(x) - a_1 \quad [L_1]$$

...

$$\chi_{A_{n-2}}(x) = x\chi_{A_{n-1}}(x) - a_{n-2} \quad [L_{n-2}]$$

$$\chi_{A_{n-1}}(x) = x - a_{n-1} \quad [L_{n-1}]$$

En effectuant $L_0 + xL_1 + ... + x^{n-2}L_{n-2} + x^{n-1}L_{n-1}$ nous obtenons donc

$$\chi_A = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X_k.$$

Condition nécessaire évidente : $\alpha_n = 1$.

Réciproquement pour tout $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ de K^n d'après la partie précédente il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $\chi_A = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X_k$. La CNS est donc $\alpha_n = 1$.