

TD M1S1 : Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 1 : Vecteur propre

Trouver tous les $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tels que la matrice de $M \in M_3(\mathbb{R})$ $M = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admette $(1, 2, 3)$ pour vecteur propre.

Exercice 2 : Vecteurs propres

Notons E l'ensemble des applications de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et soit u l'endomorphisme de E tel que : $u(f) = f'$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ .

Exercice 3 : Valeurs propres

Soit $n \in \mathbb{N}^\times$, posons $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $A \in E$. Pour tout $X \in E$, on pose $u(X) = AX$. Prouver que $Sp(u) = Sp(A)$.

Exercice 4 : Endomorphismes nilpotents

Soit E un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1, $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si f est nilpotent (à savoir qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$) alors $Sp_{\mathbb{C}}(f) = \{0\}$.

Exercice 5 : Sous espaces stables

Soient E un K espace vectoriel, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que tout sous-espace propre pour f est stable par g .