Mathématiques

Algèbre Linéaire

INSA - 1ère année

Sandrine Scott

1 Remerciements

Je tiens à remercier ici les collègues qui m'ont aidée dans l'élaboration de ce cours, en particulier, Françoise Bernis, Raymonde Cassinet, Jean-Louis Dunau et Luc Méallarès.

2 Introduction

Ce cours a été élaboré pour des élèves de formation continue, il est donc moins théorique et moins approfondi qu'un cours classique de 1ère année. Il constitue cependant une bonne base de travail pour des élèves de 1ère année (ou de 2ème année entrant à l'insa sans avoir fait d'algèbre linéaire auparavant) pour les aider à comprendre certaines définitions et certains résultats. Il ne se substitue en aucun cas au cours de l'UV 4 de mathématiques de 1ère année.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre I

Espaces vectoriels

I.1 Définitions

Exemples :
Exemple A.1.1
Exemple A.1.2
Exemple A.1.3

Exercices :
Exercice B.1.1

Soient un ensemble E, un corps K (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et deux lois

$$\begin{array}{cccccl} + & : & E \times E & \longrightarrow & E & \text{(loi interne)} \\ & & (v_1, v_2) & \longmapsto & v_1 + v_2 & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccccl} . & : & K \times E & \longrightarrow & E & \text{(loi externe)} \\ & & (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda . v & \end{array}$$

$(E, +, .)$ est un **espace vectoriel** sur le corps K si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. La loi interne notée $+$ doit
   (a) être commutative c'est-à-dire pour tous v_1, v_2 dans E, $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
   (b) être assiociative c'est-à-dire pour tous v_1, v_2, v_3 dans E, $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
   (c) admettre un neutre noté 0_E c'est-à-dire pour tout v dans E, $v + 0_E = v$
   (d) être telle que tout élément v de E admette un symétrique c'est-à-dire que pour tout v dans E, il existe v' dans E tel que $v + v' = 0_E$

   (à ce stade, on dit que $(E, +)$ est un groupe commutatif)

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

2. La loi externe notée . doit vérifier pour tous v_1, v_2 dans E et tous λ, μ dans K,
   (a) $\lambda.(v_1 + v_2) = \lambda.v_1 + \lambda.v_2$
   (b) $(\lambda + \mu).v_1 = \lambda.v_1 + \mu.v_1$
   (c) $(\lambda\mu).v_1 = \lambda.(\mu.v_1)$
   (d) $1_K.v_1 = v_1$.

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs**, ceux de K des **scalaires**.

Les règles de calculs sont analogues à celles de $\mathbb{R}$ et on a

$$\lambda.v = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_K \quad \text{ou} \quad v = 0_E$$

I.2 Sous-espace vectoriel

Exemples :
Exemple A.1.4
Exemple A.1.5
Exemple A.1.6

Exercices :
Exercice B.1.2

Soient $(E, +, .)$ un $K-$ espace vectoriel et F un sous-ensemble de E.

$(F, +, .)$ est un **sous-espace vectoriel** de E si $F \neq \emptyset$ et si pour tous v_1, v_2 de F et tout λ de K alors

$$\lambda.v_1 + v_2 \in F$$

On dit que F est stable pour les lois + et .

Théorème I.1 *Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel*

Démonstration

Remarque : Si un sous-ensemble F de E ne contient pas 0_E, il ne peut pas être un sous-espace vectoriel (pas de neutre pour l'addition).

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.3 Partie génératrice

Exemples :
Exemple A.1.7
Exemple A.1.8

Exercices :
Exercice B.1.3

Soit E un espace vectoriel sur K, et A une partie non vide de E.

On appelle **combinaison linéaire** d'éléments de A tout vecteur de la forme :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m \quad \text{où} \quad \forall i \ \lambda_i \in K \quad \text{et} \quad x_i \in A$$

Théorème I.2 *L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A est un sous espace vectoriel sur K de E, il contient A. On l'appelle le sous espace vectoriel de E engendré par A, on le note Vect (A).*

C'est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant A.

Démonstration

Remarque : Si F est un s.e.v. de E alors $F = \text{Vect }(F)$.

Si A est une partie de E telle que $E = \text{Vect }(A)$ alors A est une **famille ou partie génératrice** de E. On dit aussi que A engendre E.

Si A engendre E alors tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de A.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.4 Partie libre, Partie liée

Exemples :
Exemple A.1.9
Exemple A.1.10

Exercices :
Exercice B.1.4

Soit E un espace vectoriel sur K, et $v_1, v_2, ..., v_n$ des vecteurs de E.

$(v_1, v_2, ..., v_n)$ est une **partie libre** de E si et seulement si :

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n$$

$$\left[\left(\underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0_E}_{\text{combinaison linéaire nulle des } v_i} \right) \Longrightarrow \underbrace{(\forall i \in \{1, 2, ..., n\}\ \lambda_i = 0_K)}_{\text{les } \lambda_i \text{ sont tous nuls}}\right]$$

Si la famille est libre, la seule façon d'obtenir 0_E comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est de prendre tous les λ_i nuls.

Dans le cas contraire on dit que la famille est **liée**.

En d'autres termes, $(v_1, v_2, ..., v_n)$ est une partie liée de E si et seulement si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n \quad ,$$

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0_E}_{\text{combinaison linéaire nulle des } x_i} \quad \text{et} \quad \underbrace{\exists i \in \{1, 2, ..., n\}\ \lambda_i \neq 0_K}_{\text{les } \lambda_i \text{ sont non tous nuls}}$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.5 Base d'un espace vectoriel

Exemples :
Exemple A.1.11
Exemple A.1.12

Exercices :
Exercice B.1.5

Soit E un espace vectoriel sur K. Soit $\mathcal{B}$ une partie de E. $\mathcal{B}$ est une **base** de E si c'est une partie libre et génératrice de E.

Théorème I.3 *Soit E un espace vectoriel sur K.*
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E si et seulement si

$$(\forall x \in E) \quad (\exists!(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n) \qquad (x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n)$$

ce qui signifie que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'ecrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

Les λ_i s'appellent les ***composantes ou coordonnées*** *du vecteur x relativement à la base $\mathcal{B}$.*

Démonstration

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

I.6 Dimension d'un espace vectoriel

Exemples :
Exemple A.1.13
Exemple A.1.14

Exercices :
Exercice B.1.6

Un espace vectoriel E est de **dimension finie** si il existe une famille A de cardinal fini qui engendre E, c'est-à-dire si il existe des vecteurs $e_1, e_2, \cdots, e_p$ de E tels que $E = \text{Vect}\ (e_1, e_2, \cdots, e_p)$

Théorème I.4 (théorème admis) *Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments. Si n est ce nombre, n s'appelle la **dimension** de E. On note $n = dim\ E$.*

Un espace vectoriel admet une infinité de bases qui ont toutes le même nombre de vecteurs.

L'espace vectoriel $\{0_E\}$ est un espace vectoriel de dimension 0 puisqu'il ne contient pas de famille libre.

Propriété I.5 *Si E désigne un espace vectoriel de dimension finie, si $n = dim\ E$ et si L, A et B désignent des parties de E nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Si L est une partie libre, alors card $L\ \leq n$*
2. *Si A est une partie génératrice, alors card $A\ \geq n$*
3. *Si B est une base de E, alors card $B\ = n$*
4. *Si L est libre et si card $L = n$, alors L est une base*
5. *Si A est une partie génératrice et si card $A = n$, alors A est une base*

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Le **rang** d'une famille de vecteurs est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs. On note :

$$\operatorname{rg}(v_1, v_2, ..., v_n) = \dim(\operatorname{Vect}(v_1, v_2, ..., v_n))$$

Chapitre II
Matrices et Applications linéaires

II.1 Matrices

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.1.1 Définitions

Une **matrice** à éléments dans $K(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ est un tableau rectangulaire rempli d'éléments de K.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i\in\{1,2,\dots,m\},j\in\{1,2,\dots,n\}}$$

Les a_{ij} sont des éléments de K, i est l'indice de ligne et j est l'indice de colonne.

$\mathcal{M}_{mn}(K)$ désigne l'ensemble des matrices m lignes n colonnes à coefficients dans K.

La matrice

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ appartient à } \mathcal{M}_{23}(K)$$

Dans le cas particulier où $n = m$, $\mathcal{M}_{nn}(K)$ est noté $\mathcal{M}_n(K)$ et on l'appelle l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K.

Une matrice est dite **diagonale** si $m = n$ et si pour tout $i \neq j$ dans $\{1, 2, \cdots, n\}$, les coefficients a_{ij} sont nuls.

La matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale d'ordre } 3$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On note aussi $D = \mathrm{Diag}(0, 1, 2)$.

Une matrice est dite **triangulaire supérieure** (respectivement **triangulaire inférieure**) si $m = n$ et si pour tout $i > j$ (respectivement $i < j$) dans $\{1, 2, \cdots, n\}$, les coefficients a_{ij} sont nuls.

Considérons les matrices

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

alors E est une matrice triangulaire supérieure d'ordre 3 et F est triangulaire inférieure.

Une **matrice colonne** est une matrice à une seule colonne. C'est une matrice de $\mathcal{M}_{m1}(K)$. Elles sont très utiles pour représenter les vecteurs d'un espace vectoriel :

Soit E un espace vectoriel sur K dont la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base. Soit v un vecteur de E qui s'écrit $v = e_1 + 2e_3 - 5e_4$ alors on peut définir la matrice colonne $V \in \mathcal{M}_{41}(K)$ par

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

La **transposée** d'une matice A s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de A. On la note ${}^tA$ ou A^T. Ainsi, si $A \in \mathcal{M}_{nm}(K)$ alors ${}^tA \in \mathcal{M}_{mn}(K)$.

$$\text{Si} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{32}(K) \quad \text{alors} \quad {}^t\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{23}(K)$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.1.2 Opérations

Exercices :
Exercice B.2.1
Exercice B.2.2
Exercice B.2.3
Exercice B.2.4

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{mn}(K)$. Notons a_{ij} les coefficients de A et b_{ij} ceux de B. On appelle **somme** des matrices A et B la matrice S de $\mathcal{M}_{mn}(K)$ dont les coefficients s_{ij} sont définis pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$ et tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$ par $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. On note $S = A + B$.

Soient

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La somme $\Omega + \Delta$ n'existe pas puisque les matrices n'ont pas le même nombre de lignes ni de colonnes.

Par contre,

$$\Omega + {}^t\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

On montre que $(\mathcal{M}_{mn}(K), +)$ a une structure de groupe commutatif.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Opérations

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$. Notons a_{ij} ses coefficients. Multiplier une matrice par un scalaire $\lambda \in K$, revient à multiplier tous les coefficients par ce scalaire. Si on note λ_{ij} les coefficients de la matrice Λ, résultat de cette opération, alors pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$ et tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $\lambda_{ij} = \lambda a_{ij}$ et on note $\Lambda = \lambda.A$ Ainsi

$$2.\Omega = 2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

On montre que $(\mathcal{M}_{mn}(K), +, .)$ a une structure d'espace vectoriel. Il est de dimension finie et sa dimension est $\dim \mathcal{M}_{mn}(K) = mn$.

Soient $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(K)$. Notons a_{ij} les coefficients de A et b_{ij} ceux de B. On appelle **produit** des matrices A et B la matrice P de $\mathcal{M}_{mp}(K)$ dont les coefficients p_{ij} sont définis pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$ et tout $j \in \{1, 2, ..., p\}$ par $p_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. On note $P = AB$. On dit que le produit s'effectue lignes par colonnes. Cette définition sera justifiée *a posteriori* lorsque nous définirons les matrices d'applications linéaires.

Pour que le produit ait un sens, il faut que le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrtice B.

Le produit ${}^t\Delta\Omega$ n'existe pas car le nombre de colonnes de ${}^t\Delta$ (en l'occurrence 3) ne correspond pas au nombre de lignes de Ω (en l'occurrence 2).

Par contre

$$P = \Omega\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

En effet, si on note ω_{ij}, δ_{ij} et $p_{i,j}$ les coefficients respectifs des matrices Ω, Δ et P alors

$$\begin{aligned}
p_{11} &= \sum_{k=1}^{3} \omega_{1k}\delta_{k1} = 1\times 1 + 2\times(-2) + 3\times 0 = -3 \\
p_{12} &= \sum_{k=1}^{3} \omega_{1k}\delta_{k2} = 1\times 2 + 2\times 1 + 3\times(-1) = 1 \\
p_{21} &= \sum_{k=1}^{3} \omega_{2k}\delta_{k1} = 4\times 1 + 5\times(-2) + 6\times 0 = -6 \\
p_{22} &= \sum_{k=1}^{3} \omega_{2k}\delta_{k2} = 4\times 2 + 5\times 1 + 6\times(-1) = 7
\end{aligned}$$

Le produit matriciel est une loi associative et distributive par rapport à l'addition : pour toutes matrices A, B et C telles que les opérations soient possibles, nous avons

$$A(BC) = (AB)C \quad \text{et} \quad A(B+C) = AB + AC$$

Le produit n'est pas commutatif .(cf exercice B.2.3)

Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et si $I_n = \mathrm{Diag}(1, 1, \cdots, 1) \in \mathcal{M}_n(K)$ alors $AI_n = I_n A = A$.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.1.3 Matrice inversible

Exemples :
Exemple A.2.1

Exercices :
Exercice B.2.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On dit que A est **inversible** si il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $AA' = A'A = I_n$. Si A' existe, elle est unique et on la note A^{-1}.

Dans la mesure où A et B sont inversibles, le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

De même, si A est inversible alors la transposée de A est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

II.2 Applications linéaires

II.2.1 Définition

Exemples :
Exemple A.2.2
Exemple A.2.3
Exemple A.2.4
Exemple A.2.5

Exercices :
Exercice B.2.6

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. Soit g une application de E dans F.

g est une **application linéaire** si $\forall (v, v') \in E^2 \ \ \forall \lambda \in K$

$$g(v+v') = g(v) + g(v') \ \text{ et } \ g(\lambda.v) = \lambda.g(v)$$

Remarque : Si g est linéaire alors $g(0_E) = 0_F$

En effet, pour tout x dans E, $g(0_E) = g(0_K.x) = 0_K.g(x) = 0_E$.

On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Lorsque $E = F$ on le note $L(E)$ ou encore $End(E)$, et on l'appelle aussi l'ensemble des **endomorphismes** de E.

On a la propriété suivante :

$$g \in L(E,F) \Longleftrightarrow \forall (v,v') \in E^2 \ \ \forall \lambda \in K \ \ g(\lambda.v + v') = \lambda.g(v) + g(v')$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Définition

Si on munit $L(E,F)$ des lois $+$ et $.$ définies pour les applications (cf exemple A.1.3) alors $(L(E),+,.)$ a une structure d'espace vectoriel sur K.

Soit g une application de E dans F.

g est **injective** si $\forall (v,v') \in E^2 \;\; g(v) = g(v') \Longrightarrow v = v'$

g est **surjective** si $\forall w \in F, \exists v \in E$ tel que $w = g(v)$.

g est **bijective** si $\forall w \in F, \exists\,!\; v \in E$ tel que $w = g(v)$

(! signifiant que pour chaque w, le v est unique)

g est bijective si et seulement si g est injective et surjective.

II.2.2 Noyau, image et rang d'une application linéaire

Exemples :
Exemple A.2.6
Exemple A.2.7
Exemple A.2.8

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $g \in L(E, F)$.

Le **noyau** de g, noté Ker g, est défini par :

$$\text{Ker } g = \{v \in E \ / \ g(v) \ = \ 0_F\} = g^{-1}(\{0_F\}) \subset E$$

Ker g est l'ensemble des antécédents par g du vecteur nul de F.

L'**image** de g, notée Im g, est définie par :

$$\text{Im } g = \{w \in F \ / \ \exists v \in E \ , \ w = f(v)\} = \{f(v) \ / \ v \ \in E\} \subset F$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Théorème II.2.1 *Ker g est un sous espace vectoriel de E, Im g un sous espace vectoriel de F. De plus on a :*

$$\begin{array}{rcl} g \ \ \textit{est surjective} & \iff & \textit{Im}\ g \ = \ F \\ g \ \ \textit{est injective} & \iff & \textit{Ker}\ g \ = \ \{0_E\} \end{array}$$

Démonstration

Si Im g est un sous espace vectoriel de dimension finie de F, on appelle **rang** de g, le réel noté rg g, égal à la dimension de Im g.
On a :

$$\mathrm{rg}\ g \ = \ \dim \mathrm{Im}\ g$$

Théorème II.2.2 (Théorème du rang) *(admis)*
Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, avec E de dimension finie, et $g \in L(E,F)$. On a :

$$\textit{dim}\ \ E \ = \ \textit{dim Ker}\ g \ + \ \textit{dim}\ \ \textit{Im}\ g$$

Corollaire II.2.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, de même dimension n, et $g \in L(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$\Updownarrow \begin{array}{ll} 1) & g \ \ \textit{est bijective} \\ 2) & g \ \ \textit{est injective} \\ 3) & g \ \ \textit{est surjective} \\ 4) & \textit{rg}\ g \ = n \end{array}$$

Démonstration

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.3 Matrices d'applications linéaires

II.3.1 Définitions

Exemples :
Exemple A.2.9
Exemple A.2.10

Exercices :
Exercice B.2.8

Soient E et F deux $K-$espaces vectoriels de dimension finie et $g \in L(E,F)$.

L'application g est caractérisée par la connaissance des images des vecteurs d'une base de E.

En effet, soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base de E. Pour tout $x \in E$ il existe $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in K^p$ tel que

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$$

En utilisant le fait que g est linéaire on obtient

$$g(x) = g\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j g(e_j) \tag{II.3.1}$$

Ainsi, si nous connaissons $g(e_j)$ pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$, l'application linéaire g est déterminée de manière unique.

Définitions

Soit $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une base de F. Pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$, $g(e_j) \in F$ et il existe $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}) \in K^n$ tel que

$$g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

Notons X la matrice colonne formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$, Y celle formée des coordonnées de $g(x)$ dans la base $\mathcal{F}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$, Y_j celle formée des coordonnées de $g(e_j)$ dans la base $\mathcal{F}$. Nous avons donc

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Notons A la matrice dont les colonnes sont les matrices Y_j. Nous avons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le but est de trouver une relation entre les matrices X , Y et A.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Si nous écrivons de façon matricelle la relation (II.3.1) nous obtenons :

$$Y=\sum_{j=1}^{p} x_jY_j \quad = \quad x_1\begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{k1}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{k2}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{pmatrix}+\cdots+x_p\begin{pmatrix} a_{1p}\\ a_{2p}\\ \vdots\\ a_{kp}\\ \vdots\\ a_{np}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p\\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \cdots & + & a_{kp}x_p\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p \end{pmatrix} = AX$$

A s'appelle la matrice de l'application linéaire g relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Elle est donc définie de la manière suivante :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} g(e_1) & g(e_2) & \dots & g(e_j) & \dots & g(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_i\\ \vdots\\ f_n \end{array} \end{array} = \mathrm{Mat}\,(g,\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{np}(K))$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

II.3.2 Propriétés

Exemples :
Exemple A.2.11

Dans ce paragraphe E, F, et G désignent des espaces vectoriels sur K de dimension finie respectivement égale à n, m et p.

$\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ (respectivement $\mathcal{F} = (f_1, f_2, ..., f_m)$, $\mathcal{G} = (g_1, g_2, ..., g_p)$) désigne une base de E (respectivement F,G).

On vérifie facilement les trois affirmations suivantes :

1. Soient f un élément de $L(E, F)$ et λ un élément de K alors
$$\text{Mat }(\lambda f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;=\; \lambda \text{ Mat }(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$
2. Soient f et g deux applications linéaires de $L(E, F)$, on a
$$\text{Mat }(f + g, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;=\; \text{Mat }(f, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \;+\; \text{Mat }(g, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$
3. Si f et g désignent deux applications linéaires appartenant respectivement à $L(E, F)$ et à $L(F, G)$ alors
$$\text{Mat }(g \circ f, \mathcal{E}, \mathcal{G}) \;=\; \text{Mat }(g, \mathcal{F}, \mathcal{G}) \;\; \text{Mat }(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$
ce qui justifie *a posteriori* la définition du produit de deux matrices.
4. Si $f \in L(E, F)$ est bijective alors dim E = dim F et
$$\text{Mat }(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})\text{Mat }(f^{-1}, \mathcal{F}, \mathcal{E}) = \text{Mat }(f \circ f^{-1}, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = I_n = \text{Mat }(f^{-1}, \mathcal{F}, \mathcal{E})\text{Mat }(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Donc la matrice de l'application linéaire f est inversible et

$$\text{Mat}\,(f^{-1}, \mathcal{F}, \mathcal{E}) \;=\; M^{-1}(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

Réciproquement, si une matrice est inversible, l'application linéaire canoniquement associée est bijective.

II.3.3 Matrice de changement de bases

Exemples :
Exemple A.2.12

Exercices :
Exercice B.2.9

Nous avons déjà remarqué qu'un même espace vectoriel pouvait avoir plusieurs bases.

Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ deux bases du même espace vectoriel E. Soit x un vecteur de E. Notons $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ et $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}'$.
Soient X et X' les matrices colonnes associées aux coordonnées de x dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

La question est de savoir quel lien existe entre les matrices X et X'.

Pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, il existe $(p_{1j}, p_{2j}, \cdots, p_{nj}) \in K^n$ tel que

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$$

Soit I l'application linéaire définie de E, muni de la base $\mathcal{E}'$, vers E, muni de la base $\mathcal{E}$ et qui pour chaque vecteur x de coordonnées $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ dans la base $\mathcal{E}'$ associe ses coordonnées $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dans la base $\mathcal{E}$. Ainsi chaque e'_j, de coordonnées $(0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ dans la base $\mathcal{E}'$ a pour image $(p_{1j}, p_{2j}, \cdots, p_{nj})$ qui sont ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$:

$$\begin{array}{cccc} I : & (E, \mathcal{E}') & \longrightarrow & (E, \mathcal{E}) \\ & (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) & \longmapsto & (x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ & e'_j & \longmapsto & (p_{1j}, p_{2j}, \cdots, p_{nj}) \end{array}$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Soit P la matrice de cette application linéaire alors

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2j} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{j1} & p_{j2} & \dots & p_{jj} & \dots & p_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nj} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

et $X = PX'$.

P s'appelle la **matrice de passage** entre les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, on la note $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$. C'est la matrice de l'application I relativement aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$:

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = \text{Mat } (I, \mathcal{E}', \mathcal{E}).$$

Il est clair que l'application I est bijective et que son application réciproque est définie par :

$$\begin{array}{rccl} I^{-1} : & (E, \mathcal{E}) & \longrightarrow & (E, \mathcal{E}') \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \\ & e_j & \longmapsto & (p'_{1j}, p'_{2j}, \cdots, p'_{nj}) \end{array}$$

où pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} p'_{ij} e'_i$$

.

Ainsi la matrice $P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ est inversible et

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}^{-1} = P_{\mathcal{E}'\mathcal{E}}$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Matrice de changement de bases

Voyons comment est transformée la matrice d'une application linéaire lorsqu'on change de bases.

Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$, $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ deux bases du même espace vectoriel E et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, ..., f_p)$, $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2, ..., f'_p)$ deux bases du même espace vectoriel F. Soient enfin $g \in L(E, F)$, $A = \text{Mat }(g, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $A' = \text{Mat }(g, \mathcal{E}', \mathcal{F}')$. Quel lien existe-t-il entre les matrices A et A' ?

Soit x un vecteur de E. Notons X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}$, X' celle des coordonnées de x dans la base $\mathcal{E}'$ et de même, notons Y la matrice colonne des coordonnées de $y = g(x)$ dans la base $\mathcal{F}$ et Y' celle des coordonnées de y dans la base $\mathcal{F}'$. Soient enfin les matrices de passage $P = P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ et $Q = P_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}$.
Nous avons les relations suivantes

$$X = PX', \quad Y = QY', \quad Y = AX \quad \text{et} \quad Y' = A'X'$$

et

$$Y = AX \iff QY' = APX' \iff Y' = Q^{-1}APX'$$

donc $A' = Q^{-1}AP$ et

$$\text{Mat }(g, \mathcal{E}', \mathcal{F}') = P_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}^{-1} A P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} \tag{II.3.2}$$

II.3.4 Rang d'une matrice

Exemples :
Exemple A.2.13

Exercices :
Exercice B.2.10

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{mn}(K)$ dont les colonnes sont identifiées à n vecteurs $V_1, V_2, ..., V_n$ de K^m.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} V_1 & V_2 & \dots & V_j & \dots & V_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Par définition le **rang de la matrice** A est égal à la dimension de Vect $(V_1, V_2, ..., V_n)$ soit à la dimension de l'espace engendré par les colonnes de A.

On note

$$\text{rg } A \;=\; \dim \; \text{Vect } (V_1, V_2, ..., V_n)$$

Remarque :

$$\text{rg } A \leq \min(m, n)$$

En effet, notons $E = \text{Vect } (V_1, V_2, ..., V_n)$, alors rg $A = \dim E$.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

E est un sous-espace vectoriel de K^m engendré par n vecteurs donc sa dimension est plus petite que celle de K^m qui vaut m et que le nombre de vecteurs générateurs, qui ici vaut n.

Soit E (respectivement F) un espace vectoriel de dimension n (respectivement m) dont $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{F}$) est une base. Soit $g \in L(E, F)$ telle que Mat $(g, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = A$.

Alors on a :

$$\text{rg } A \quad = \quad \text{rg } g$$

En effet, les vecteurs colonnes de A sont les vecteurs $\{g(e_1), g(e_2), \cdots, g(e_n)\}$ qui forment une famille génératrice de Im g.

On a de plus le résultat suivant :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(K), \;\; \text{rg } A \quad = \quad \text{rg } {}^t A$$

Ce qui permet de définir le rang d'une matrice comme la dimension de l'espace engendré par les lignes de A.

Chapitre III

Déterminants

III.1 Forme n linéaire alternée

Soit E un espace vectoriel sur le corps K dont $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base. On considère une application φ

$$\begin{array}{ccc} E \times E \times \cdots \times E & \longrightarrow & K \\ (V_1, V_2, \cdots, V_n) & \longmapsto & \varphi(V_1, V_2, \cdots, V_n) \end{array}$$

telle que

1. φ est linéaire par rapport à chaque variable :

   Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, tout $W_i \in E$ et tout $\lambda \in K$ alors

   $$\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_{i-1}, V_i + \lambda W_i, V_{i+1}, \cdots, V_n) \ =$$

   $$\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, \cdots, V_n) \ + \ \lambda\, \varphi(V_1, V_2, \cdots, V_{i-1}, W_i, V_{i+1}, \cdots, V_n)$$

2. Si il existe $i \neq j$ tel que $V_i = V_j$ alors

   $$\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_j, \cdots, V_n) = 0$$

3. $$\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_j, \cdots, V_i, \cdots, V_n) = -\varphi(V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_j, \cdots, V_n)$$

4. $$\varphi(e_1, e_2, \cdots, e_n) = 1$$

On démontre qu'une telle application est unique, on la note $\det_{\mathcal{E}}$ et $\det_{\mathcal{E}}(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ est appelé le **déterminant** des vecteurs $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ par rapport à la base $\mathcal{E}$.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On peut aussi démontrer le résultat suivant :

$$\forall (V_1, V_2, \cdots, V_n) \in E^n \quad [(V_1, V_2, \cdots, V_n) \;\; libre \quad \Longleftrightarrow \quad \det_{\mathcal{E}}(V_1, V_2, ..., V_n) \neq 0]$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.2 Déterminant d'une matrice carrée

Exemples :
Exemple A.3.1

Exercices :
Exercice B.3.1

Soit la matrice carrée d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle $C_1, C_2, \cdots, C_n$ (respectivement $L_1, L_2, \cdots, L_n$) les colonnes (respectivement les lignes) de la matrice A.

Le déterminant de A noté $\det A$ est le déterminant des vecteurs $C_1, C_2, \cdots, C_n$ par rapport à la base $\mathcal{E}$. On a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \det{}_{\mathcal{E}}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

On montre que

$$\det A = \det {}^tA$$

donc le déterminant de A est aussi le déterminant des vecteurs $L_1, L_2, \cdots, L_n$ par rapport à la base $\mathcal{E}$. On a

$$\det A = \det_{\mathcal{E}}(L_1, L_2, \cdots, L_n)$$

Dans le but d'expliciter det A par une relation de récurrence où A est une matrice d'ordre n on définit pour tous i, j dans $\{1, 2, \cdots, n\}$ les matrices A_{ij} d'ordre $n-1$ obtenues à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Exemple : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

alors,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ceci étant défini, on a le résultat suivant.

Théorème III.1 (Développement d'un déterminant) *(admis) Avec les notations précédentes, nous avons*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

on dit que l'on a développé le déterminant de A par rapport à la colonne j, ou aussi

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

on dit que l'on a développé le déterminant de A par rapport à la ligne i.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Ce théorème se démontre par récurrence sur n.

Il est clair que si $A = (a)$ alors det $A = a$.

Nous savons que

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

et si nous développons ce déterminant par rapport à la 2ème ligne alors

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{2+1} c \det (b) + (-1)^{2+2} d \det (a) = -bc + ad$$

Remarque : On s'aperçoit très vite que cette méthode est lourde, surtout si la taille de la matrice augmente. Par contre cette formule est très paratique quand une ligne ou une colonne contient beaucoup de zéros.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

III.3 Propriétés et calcul pratique

Exemples :
Exemple A.3.3

Exercices :
Exercice B.3.2

Par rapport à la remarque du paragraphe précédent, on souhaite essayer de faire apparaître le maximum de zéros dans une ligne ou dans une colonne d'une matrice A, sans changer le déterminant, pour ensuite développer le déterminant par rapport à cette ligne ou colonne.

Soit A une matrice carrée d'ordre n dont on note $C_1, C_2, \cdots, C_n$ (respectivement $L_1, L_2, \cdots, L_n$) les colonnes (respectivement les lignes). Nous avons les propriétés suivantes :

1. Ajouter à une colonne C_i un combinaison linéaire des <u>autres</u> colonnes ne change pas le déterminant de A. En effet :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(C_1, \cdots, C_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j C_j, \cdots C_n) &= \det_{\mathcal{E}}(C_1, \cdots, C_i, \cdots, C_n) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \det_{\mathcal{E}}(C_1, \cdots, C_j, \cdots, C_n)\\ &= \det_{\mathcal{E}}(C_1, C_2, \cdots, C_n) = \det A\end{aligned}$$

car dès que deux colonnes sont égales, le déterminant est nul.

2. De même ajouter à une ligne L_i un combinaison linéaire des <u>autres</u> lignes ne change pas le déterminant de A. En effet :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{E}}(L_1, \cdots, L_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j L_j, \cdots L_n) &= \det_{\mathcal{E}}(L_1, \cdots, L_i, \cdots, L_n) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j \det_{\mathcal{E}}(L_1, \cdots, L_j, \cdots, L_n)\\ &= \det_{\mathcal{E}}(L_1, L_2, \cdots, L_n) = \det A\end{aligned}$$

car dès que deux lignes sont égales, le déterminant est nul.

3. $$\det_{\mathcal{E}}(\lambda_1 C_1, \lambda_2 C_2, \cdots, \lambda_n C_n) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \det_{\mathcal{E}}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

   donc multiplier une matrice carrée d'ordre n par une constante λ revient à multiplier son déterminant par λ^n :
   $$\det \lambda A = \lambda^n \det A.$$

III.4 Autres propriétés

Exemples :
Exemple A.3.4

Exercices :
Exercice B.3.3

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$.

1. $\det\ (AB) = \det\ A \det\ B$
2. A est inversible si et seulement si $\det\ A\ \neq 0$

En effet , nous savons que si $f \in End(E)$ et E de dimension finie n alors

$$f \text{ bijective} \Longleftrightarrow f \text{ injective} \Longleftrightarrow f \text{ surjective} \Longleftrightarrow \mathrm{rg}\ f = n$$

En transposant ceci à la matrice A, interprétée comme la matrice d'un endomorphisme on obtient en particulier

$$\mathrm{rg}\ A = n \Longleftrightarrow A\ \text{ inversible}$$

et

$$\mathrm{rg}\ A = n \Longleftrightarrow \text{ Les vecteurs colonnes sont libres } \Longleftrightarrow \det_{\mathcal{E}}(C_1, C_2, ..., C_n) \neq 0$$

De plus, puisque $AA^{-1} = I_n$ nous avons la formule

$$1 = \det\ I_n = \det\ (AA^{-1}) = \det\ A \det\ A^{-1}$$

et

$$\det\ A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{\det\ A}$$

3. Si A et A' sont deux matrices représentant le même endomorphisme f alors il existe une matrice P telle que $A' = P^{-1}AP$. On a

$$\det A' = \det (P^{-1}AP) = \det (P^{-1}A) \det P = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$$

Ainsi le déterminant d'une application linéaire ne dépend pas de la base dans laquelle on écrit sa matrice et on a

$$\det f = \det A \quad \text{où} \quad A \quad \text{est la matrice de} \quad f \quad \text{dans n'importe quelle base de} \quad E$$

4. On appelle comatrice de A ou bien matrice des cofacteurs de A, la matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ notée $Com\ A$ définie par :

$$Com\ A \quad = \quad ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Alors si A est inversible,

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{\det A}\ {}^{t}Com(A)$$

Autres propriétés

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre IV
Systèmes d'équations linéaires

IV.1 Position du problème

Soit à résoudre le système d'équations linéaires de m équations et n inconnues suivant :

$$
(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \ldots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & & & & & & & & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \ldots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
 & & & & & & & & \\
a_{m-11}x_1 & + & a_{m-12}x_2 & + & \ldots & + & a_{m-1n}x_n & = & b_{m-1} \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}\right.
$$

Les a_{ij} ainsi que les b_i sont des données, éléments de K.
Les x_i sont les n inconnues éléments de K .

1. **Ecriture matricielle** : On peut écrire ce système de la façon suivante :

$$AX = B$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

et

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \\ a_{m-11} & a_{m-12} & \dots & a_{m-1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. **Ecriture vectorielle** : Si on note $A_1, A_2, \cdots, A_n$ les colonnes de la matrice A alors le système s'écrit
$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots x_n A_n = B$$
3. **Ecriture fonctionnelle** : Si la matrice A représente l' application linéaire f de $L(E, F)$ et si X et B sont les matrices colonnes représentant les vecteurs x et b alors le système sécrit aussi
$$f(x) = b$$

Résoudre ce système, c'est trouver tous les n-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ qui satisfont aux m équations. C'est définir l'ensemble des antécédents de b par f.

Si $b = 0_F$, l'équation $f(x) = 0_F$ est appelée **équation homogène**, elle représente le **système homogène**. Résoudre ce système revient à détermnier le noyau Ker f. On a toujours $0_E \in$ Ker f donc 0_E est toujours solution du système homogène, c'est la solution triviale.

Soit x_0 une solution particulière de (S) alors on a $f(x_0) = b$ et le système à résoudre devient
$$f(x) = f(x_0) \;\text{ soit }\; f(x - x_0) = 0_F \;\text{ et }\; x - x_0 \in \text{Ker } f$$
Les solutions de (S) sont de la forme $z + x_0$ où $z \in$ Ker f et x_0 est une solution particulière.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.2 Pivot de Gauss

Exemples :
Exemple A.4.1
Exemple A.4.2
Exemple A.4.3

Exercices :
Exercice B.4.1

Nous nous contenterons de présenter cette méthode sur trois exemples. Cette méthode consiste à transformer le système en un système triangulaire (c'est-à-dire tel que la matrice du système soit triangulaire) et que l'on résout facilement en partant du bas.

Cette transformation se fait en remplaçant une ligne par cette ligne plus une constante fois une ligne fixée à l'avance de sorte de faire apparaître un zéro.

Les exemples A.4.1, A.4.2 et A.4.3 présentent les trois cas de figure possibles.

Cette méthode est assez pratique.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

IV.3 Systèmes de Cramer

Exemples :
Exemple A.4.4

On se place dans le cas particulier où $m = n$. Nous allons présenter un procédé de résolution utilisant le calcul des déterminants. Le résultat est le suivant :

Théorème IV.2 *Le système (S) a une unique solution si et seulement si le déterminant de A n'est pas nul.*

Dans ce cas le système (S) est qualifié de Cramer.

Si on note $A_1, A_2, \cdots, A_n$ les n colonnes de A alors l'unique solution de (S) est donnée par les égalités suivantes :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \qquad x_i = \frac{det_{\mathcal{E}}(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n)}{det\ A}$$

(on a remplacé la colonne i par le vecteur B.)

Démonstration

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Chapitre V
Réduction des endomorphismes

V.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Exemples :
Exemple A.5.1

Exercices :
Exercice B.5.1

Dans tout ce chapitre, E désigne un $K-$espace vectoriel de dimension n et f est un endomorphisme de E.

Le but de ce chapitre est de trouver une base $\mathcal{E}$ de E telle que Mat $(f, \mathcal{E})$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{E}$, soit la plus "simple" possible, l'idéal étant lorsque Mat $(f, \mathcal{E})$ est diagonale.

On appelle **valeur propre** de f un scalaire λ de K tel qu'il existe un vecteur v de E <u>non nul</u> tel que $f(v) = \lambda v$.

Le vecteur v est appelé **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

V.2 Espace propre

Exemples :
Exemple A.5.2

Exercices :
Exercice B.5.2

Soit λ un scalaire, on note : $E_\lambda = \{v \in E,\ f(v) = \lambda v\}$. On a :

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \{v \in E,\ f(v) - \lambda v = 0_E\} \\ &= \{v \in E,\ (f - \lambda\, Id_E)(v) = 0_E\} \\ &= Ker(f - \lambda Id_E) \end{aligned}$$

Par conséquent, E_λ est un s.e.v. de E puisqu'il est le noyau d'une application linéaire.

Si λ n'est pas valeur propre de f alors seul le vecteur nul vérifie $f(v) = \lambda v$ et $E_\lambda = \{0_E\}$.

Si au contraire λ est une valeur propre de f, alors $E_\lambda \neq \{0_E\}$ et E_λ est appelé **sous espace propre** de E relatif à la valeur propre λ de f et dans ce cas, dim $E_\lambda \geq 1$.

On constate que si λ est une valeur propre de f, alors E_λ est stable par f ce qui signifie que pour tout $v \in E_\lambda,\ \ f(v) \in E_\lambda$ c'est-à-dire $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$.

En effet, si $v \in E_\lambda$, $f(v) = \lambda v$ et $\lambda v \in E_\lambda$ puisque E_λ est un s.e.v. de E donc en particulier, E_λ est stable pour la loi interne. On peut donc considérer la restriction de f à E_λ dont la matrice dans

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Espace propre

une base $\mathcal{E}_\lambda$ de E_λ est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{\dim\ E_\lambda}(K)$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

V.3 Polynôme caractérisitique

Exemples :
Exemple A.5.3

Exercices :
Exercice B.5.3

Soit $A = (a_{ij})_{i\in\{1,2,\cdots,n\},j\in\{1,2,\cdots,n\}} \in \mathcal{M}_n(K)$.

Théorème V.3 (admis) *On définit la fonction $P_A(x)$ par*

$$P_A(x) = det(A - xI_n).$$

Cette fonction est une fonction polynôme de degré n, qui s'ecrit

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\ Tr(A)x^{n-1} + \cdots +\ det(A) \quad où \quad Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

*Cette fonction polynôme s'appelle le **polynôme caractéristique** de A.*

Si A et A' sont les matrices d'un même endomorphisme f relativement à deux bases différentes alors $P_A(x) = P_{A'}(x)$.

En effet, par la formule de changement de base (II.3.2) on a

$$A' = P^{-1}AP \ \text{ où } \ P \ \text{ est la matrice de passage entre les deux bases.}$$

Il est clair que $A' - xI_n = P^{-1}(A - xI_n)P$ et en prenant le déterminant on obtient

$$\det\ (A' - xI_n) \quad = \quad = \det\ (P^{-1})\ \det\ (A - xI_n)\ \det\ P = \det\ (A - xI_n)$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

puisque $\det\,(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det\,P}$.

Ainsi on peut définir le polymôme caractéristique de f, par

$$P_f(x) = det(f - x\mathrm{id}_E) = det(A - xI_n)$$

pour toute matrice A représentant f dans une base de E.

Théorème V.4 *Les valeurs propres de f sont les racines de P_f.*

Démonstration

On appelle **multiplicité** d'une valeur propre λ, l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de P_f. On la note m_λ.

Propriété V.5 *Soit f un endomorphisme de E et A sa matrice représentative dans une base de E.*

- *Si dim $E = n$, alors f a au plus n valeurs propres.*
- *Si P_f est scindé, (ce qui sera toujours le cas si $K = \mathbb{C}$) alors :*
  - *f a n valeurs propres distinctes ou non.*
  - *La somme des valeurs propres est égale à $Tr(A)$.*
  - *Le produit des valeurs propres de f est égal à $\det\,A = \det\,f$.*

Démonstration

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

V.4 Diagonalisation des endomorphismes

Exemples :
Exemple A.5.4

Exercices :
Exercice B.5.4

Si λ est une valeur propre de multiplicité m_λ de l'endomorphisme f et si E_λ est l'espace propre associé, alors on vérifie que

$$1 \leq \dim\, E_\lambda \leq m_\lambda$$

Remarque : Si $m_\lambda = 1$ alors $\dim\, E_\lambda = 1 = m_\lambda$.

Un endomorphisme f est diagonalisable, s'il existe une base $\mathcal{V}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale c'est-à-dire,

$$\text{Mat}\,(f,\mathcal{V}) \quad = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(on notera $\mathcal{E}$ la base canonique de E)

Premières conséquences : Si f est diagonalisable alors

1. les termes de la diagonale principale de la matrice sont les valeurs propres de f.
2. le nombre de fois où figure une valeur propre sur cette diagonale est égal à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre.
3. ce nombre est aussi égal à la dimension du sous espace propre associé à cette valeur propre.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

4. le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P_f(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x)$$

il est donc scindé dans K.

Au vu de la matrice il est clair que

f est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs propres.

On peut également montrer que la réunion des bases des espaces propres forme toujours une famille libre.

Nous avons de plus l'équivalence suivante :

Théorème V.6 (Admis) *f est diagonalisable si et seulement si*
$$\begin{cases} P_f \text{ est scindée dans } K \\ \text{Pour toute valeur propre } \lambda, \dim E_\lambda = m_\lambda. \end{cases}$$

Cas particulier important :

Corollaire V.7 *Si le polynôme caractéristique de f a $n = \dim E$ racines distinctes, alors f est diagonalisable.*

Démonstration

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

V.5 Applications

Exemples :
Exemple A.5.5
Exemple A.5.6
Exemple A.5.7

1) Calcul de A^m.

   Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(K)$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ tels que $D = P^{-1}AP$ et $A = PDP^{-1}$.
   On a alors $A^m = PD^mP^{-1}$ avec $D^m = \mathrm{Diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \cdots, \lambda_n^m)$.

   (cf l'exemple A.5.5)

2) Applications aux systèmes linéaires d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants.

   Nous nous contenterons de présenter un exemple.
   Soit à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x(t) & & & + & 4z(t) & = & x'(t) \\ 3x(t) & - & 4y(t) & + & 12z(t) & = & y'(t) \\ x(t) & - & 2y(t) & + & 5z(t) & = & z'(t) \end{array} \right.$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

où x, y et z sont des fonctions de la variable t et x', y' et z' sont leurs dérivées.

Ce système s'écrit matriciellement

$$X'(t) = AX(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad et \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

on reconnaît la matrice A de l'exemple A.5.4. Ainsi en multipliant à gauche les deux membres de l'égalité $X'(t) = AX(t)$ par la matrice P^{-1} et en posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$$

on obtient $Y'(t) = DY(t)$ où D est diagonale, et le système est très simple à résoudre.

On résout en $Y(t)$ et on revient à $X(t)$ grâce à la relation $X(t) = PY(t)$.

(voir les calculs dans l'exemple A.5.6).

3) Applications à des suites récurrentes.

Nous nous contenterons encore de présenter un exemple.
Soit les suites récurrentes $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in K^3 \textit{ et } \forall n \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} u_{n+1} & = & 2u_n & & & + & 4w_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n & - & 4v_n & + & 12w_n \\ w_{n+1} & = & u_n & - & 2v_n & + & 5w_n \end{array} \right.$$

Le problème est d'exprimer u_n,v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Pour cela en notant X_n le vecteur $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ on a avec les notations précédentes :

$$\forall n \geq 0 \qquad X_{n+1} = AX_n$$

Et par récurrence immédiate, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

(voir le résultat dans l'exemple A.5.7)

Annexe A

Exemples

A.1 Exemples du chapitre I

Exemple A.1.1

L'ensemble $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ muni des lois $+$ et . définies pour tous $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et tout λ de $\mathbb{R}$ par

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ et } \lambda.(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

En effet, la loi interne est commutative et associative parce que l'addition de $\mathbb{R}$ possède ces propriétés.

Elle admet un neutre qui est $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ puisque

$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y).$$

Enfin, tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ admet un symétrique qui est $(-x, -y)$ puisque

$$(x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

D'autre part, pour vérifier que la loi externe a les propriétés requises, il suffit d'écrire les formules et utiliser le fait que la multiplication dans $\mathbb{R}$ est distributive par rapport à l'addition et admet le réel 1 comme neutre.

En effet pour tous $v_1 = (x_1, y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et tous λ, μ de $\mathbb{R}$ on a

1. $\lambda.(v_1 + v_2) = \lambda.(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\lambda(x_1 + x_2), \lambda(y_1 + y_2)) = (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2)$
   $= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2) = \lambda.(x_1, y_1) + \lambda.(x_2, y_2) = \lambda.v_1 + \lambda.v_2$
2. $(\lambda + \mu).v_1 = (\lambda + \mu).(x_1, y_1) = ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)y_1) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda y_1 + \mu y_1)$
   $= (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_1, \mu y_1) = \lambda.(x_1, y_1) + \mu.(x_1, y_1) = \lambda.v_1 + \mu.v_1$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.1

3. $(\lambda\mu).v_1 = (\lambda\mu).(x_1, y_1) = ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)y_1) = (\lambda\mu x_1, \lambda\mu y_1) = \lambda.(\mu x_1, \mu y_1)$
$= \lambda.(\mu.(x_1, y_1)) = \lambda.(\mu.v_1)$
4. $1.v_1 = 1.(x_1, y_1) = (1x_1, 1y_1) = (x_1, y_1) = v_1$.

Ainsi $(\mathbb{R}^2, +, .)$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

On vérifie de la même manière que $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ muni des lois $+$ et . définies pour tous $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ de $\mathbb{R}^3$ et tout λ de $\mathbb{R}$ par

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \text{ et } \lambda.(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Plus généralement, on montre que $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), \text{ avec pour } 1 \leq i \leq n \;\; x_i \in \mathbb{R}\}$ muni des lois $+$ et . définies comme pour $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.2

Définissons deux lois sur l'ensemble des fonctions polynômes $K[x]$. Une addition notée + où additionner deux fonctions polynômes revient à faire la somme des coefficients des termes de même degré. Une loi externe notée . où multiplier une fonction polynôme P par un scalaire revient à multiplier tous les coefficients de P par ce scalaire.

Si par exemple $P = x^3 + 2x^2 - 5$ et $Q = x^2 + 8x - 3$ alors

$$P + Q = x^3 + 3x^2 + 8x - 8 \text{ et } 3.P = 3x^3 + 6x^2 - 15$$

Alors $(K[x], +, .)$ est un $K-$ espace vectoriel.

Il suffit de vérifier que les lois + et . ont les propriétés requises.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies de I vers $\mathbb{R}$. Pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit

$$f+g \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \text{ où pour tout } x \in I, (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

et

$$\lambda.f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \text{ où pour tout } x \in I, (\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$$

Là encore, $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,.)$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.4

Soit $(E, +, .)$ un $K-$ espace vectoriel. E et $\{0_E\}$ sont clairement des sous-espaces vectoriels de E.

En effet $\{0_E\}$ est non vide puisqu'il contient 0_E et pour tout λ de K, $\lambda.0_E + 0_E = 0_E \in \{0_E\}$ donc $\{0_E\}$ est un s.e.v (= sous-espace vectoriel) de E.

De même, E est non vide puisqu'il contient 0_E et pour tous v_1, v_2 dans E et tout λ de K, $\lambda.v_1 + v_2 \in E$ puisque les lois . et + sont à valeurs dans E donc E est un s.e.v de E.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.5

L'ensemble $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y = 0\}$ est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

Pour être dans E_1, un élément de $\mathbb{R}^3$ doit être tel que la somme des deux premiers coefficients vaut 0.

Regardons si E_1 contient le neutre de $\mathbb{R}^3$ à savoir $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$. On a bien $0 + 0 = 0$ donc $(0, 0, 0) \in E_1$ et E_1 n'est pas vide.

Regardons la stabilité par rapport aux lois + et ., c'est-à-dire si pour tous $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ de E_1 et tout λ de $\mathbb{R}$, $\lambda.v + v' \in E_1$.

On a $\lambda.v + v' = \lambda.(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ et $(\lambda x + x') + (\lambda y + y') = \lambda x + \lambda y + x' + y' = \lambda(x + y) + (x' + y') = \lambda 0 + 0 = 0$ puisque v et v' sont dans E_1.

Par suite $\lambda.v + v' \in E_1$ et E_1 est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.6

L'ensemble $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 1\}$ est-il un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

Pour être dans E_2, un élément de $\mathbb{R}^3$ doit être tel que la somme de tous ces coefficients vaut 1.

Regardons si E_1 contient $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$: $0 + 0 + 0 = 0 \neq 1$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \notin E_2$ et E_2 ne peut pas être un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ car la loi + n'a pas de neutre.

E_2 n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.7

Les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs e_1 et e_2 :

$$xe_1 + ye_2 = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

et $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}\ (e_1, e_2)$.

De même les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. En effet tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2 et e_3 :

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = (x, y, z)$$

et $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\ (e_1, e_2, e_3)$.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.8

Soit f_i la fonction polynôme définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_i(x) = x^i$ avec la convention que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$.

La famille de fonctions polynômes $\{f_i, i \in \mathbb{N}\}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $K[x]$. En effet, toute fonction polynôme s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs f_i. Par exemple, si $P = x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 7$ alors

$$P = f_4 + 5f_3 - 12f_2 + 7f_0$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.9

Les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Pour le prouver, il faut partir d'une combinaison linéaire nulle des e_i et montrer que la seule possibilité est que les scalaires soient nuls.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \iff (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

et (e_1, e_2) est donc une famille libre.

De même les vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En effet

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0) \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

et (e_1, e_2, e_3) est donc une famille libre.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.10

La famille $\{(1,2,3),(1,1,1),(0,0,0)\}$ est liée car

$$0(1,2,3)+0(1,1,1)+7(0,0,0)=(0,0,0) \quad \text{avec} \quad \lambda_3 = 7 \neq 0$$

On a pu écrire une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs sans que tous les coefficients soient nuls, la famille est donc liée.

On remarque que ceci sera toujours le cas dès que la famillle contient le vecteur nul.

La famille $\{(1,2,3),(1,1,1),(2,4,6)\}$ est liée car

$$2(1,2,3)+0(1,1,1)-1(2,4,6)=(0,0,0) \quad \text{avec} \quad \lambda_1 = 2 \neq 0$$

La famille $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,3,5)\}$ est-elle libre ?

Partons d'une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs et voyons si nécessairement tous les scalaires sont nuls.

$$\begin{array}{rrcl} & \lambda_1(1,2,3)+\lambda_2(1,1,1)+\lambda_3(1,3,5) & = & (0,0,0) \\ \Longleftrightarrow & (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3, 3\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3) & = & (0,0,0) \end{array}$$

ce qui conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & -\lambda_2-\lambda_3 \\ -2\lambda_2-2\lambda_3+\lambda_2+3\lambda_3 & = & 0 \\ -3\lambda_2-3\lambda_3+\lambda_2+5\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & \lambda_3 \\ \lambda_1 & = & -2\lambda_3 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.10

On constate que quel que soit λ_3,

$$-2\lambda_3(1,2,3)+\lambda_3(1,1,1)+\lambda_3(1,3,5)=(0,0,0)$$

en particulier, si $\lambda_3=-1$,

$$2(1,2,3)-(1,1,1)-(1,3,5)=(0,0,0)$$

La famille $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,3,5)\}$ est donc liée.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.11

Les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ puisqu'ils sont générateurs et libres. (cf exercices A.1.7 et A.1.9)

De même, les vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ puisqu'ils sont générateurs et libres. (cf exercices A.1.7 et A.1.9)

De la même façon dans $\mathbb{R}^n$ les vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ définis par :

$$\begin{array}{ccc} e_1 & = & (1, 0, 0, ..., 0) \\ e_2 & = & (0, 1, 0, ..., 0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & = & (0, 0, 0, ..., 1) \end{array}$$

forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.12

Dans l'exercice B.1.3, quand nous avons montré que les vecteurs $\alpha_1 = (1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1)$ et $\alpha_3 = (1, -1, -2)$ de $\mathbb{R}^3$ formaient une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ nous avons été amené à résoudre le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 - \lambda_3 & = & y \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = & z \end{cases}$$

dont l'unique solution est

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda_1 & = & \frac{1}{2}(x+y) \\ \lambda_3 & = & \frac{1}{2}(x-y) \\ \lambda_2 & = & x - y + z \end{cases}$$

Ainsi,

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \exists\,! \ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ définis par la système (S) ci-dessus tels que $(x, y, z) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$

ce qui d'après le théorème I.3 assure que la famille $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Retour au grain

Exemple A.1.13

$\mathbb{R}^2$ est de dimension finie puisque nous avons montré dans l'exemple A.1.11 que $\mathbb{R}^2$ était engendré par deux vecteurs. Ces deux vecteurs étant libres, nous avons donc $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

De même, nous avons trouvé deux bases différentes de $\mathbb{R}^3$ (cf les exemples A.1.11 et A.1.12) de même cardinal 3, donc $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Plus généralement, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathbb{R}^n = n$

D'après l'exercice B.1.5, $K_n[x]$ est de dimension finie et $\dim K_n[x] = n + 1$. (Attention !)

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.1.14

Voici plusieurs méthodes pour montrer que les vecteurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ définis dans l'exercice B.1.4 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 1 : Montrer comme dans les exercices B.1.3 et B.1.4 qu'ils forment une famille libre et génératrice. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 2 : Montrer comme dans l'exercice B.1.3 qu'ils forment une famille génératrice et remarquer que cette famille est composée de trois vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. On conclut grâce à la propriété I.5 que la famille $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 3 : Montrer comme dans l'exercice B.1.4 qu'ils forment une famille libre et remarquer que cette famille est composée de trois vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. On conclut grâce à la propriété I.5 que la famille $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : $\operatorname{rg}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exemples du chapitre II

Exemple A.2.1

La question est de savoir si les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont inversibles ?

Pour A, cherchons une matrice $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $AA' = A'A = I_2$. Nous avons

$$AA' = I_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ x+3z & y+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ y+2t & = & 0 \\ x+3z & = & 0 \\ y+3t & = & 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -2t \\ x & = & -3z \\ z & = & -1 \\ t & = & 1 \end{array} \right.$$

d'où $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie ensuite que $AA' = A'A = I_2$ donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

De la même manière pour B, on cherche une matrice $B' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $BB' = B'B = I_2$. Nous avons

$$BB' = I_2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui est impossible puisque $1 \neq 0$ donc B n'est pas inversible.

Retour au grain

Exemple A.2.1

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.2

1. Soit E un espace vectoriel sur K et α un élément de K non nul. Soit g_α l'application définie par
$$g_\alpha : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & \alpha.v \end{array}$$
Alors $g_\alpha \in L(E)$. En effet, pour tous $(v, v') \in E^2$ et tout $\lambda \in K$,
$$g_\alpha(\lambda v+v') = \alpha.(\lambda.v+v') = \alpha.(\lambda.v)+\alpha.v' = (\alpha\lambda).v+\alpha.v' = (\lambda\alpha).v+\alpha.v' = \lambda.(\alpha.v)+\alpha.v' = \lambda.g_\alpha(v)+g_\alpha(v')$$
L'application g_α est appellée l'homothétie de E de rapport α.
2. Soit l'application
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & y \end{array}$$
alors $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. En effet, pour tous $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} g(\lambda.v + v') &= g((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')) \\ &= \lambda y + y' \\ &= \lambda.g(v) + g(v') \end{aligned}$$
g s'appelle une projection.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.3

L'application $\begin{array}{cccc} f_1 & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas injective car $f_1(-2) = f_1(2) = 4$ donc on peut avoir $f_1(x) = f_1(y)$ sans que $x = y$, ce qui nie la définition d'injectif.

Une autre façon de le démontrer est de regarder ce que signifie $f_1(x) = f_1(y)$. On a pour tout x et y dans $\mathbb{R}$,

$$f_1(x) = f_1(y) \Longleftrightarrow x^2 = y^2 \Longleftrightarrow x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$$

donc pas forcément $x = y$.

L'application $\begin{array}{cccc} f_2 & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est injective car pour tout x et y dans $\mathbb{R}_+$,

$$f_2(x) = f_2(y) \Longleftrightarrow x^2 = y^2 \Longleftrightarrow x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$$

mais x et y sont positifs donc $x = -y$ est impossible et $f_2(x) = f_2(y) \Longrightarrow x = y$.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.4

L'application $\begin{array}{cccc} f_1 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas surjective car pour $w = -2$, il n'existe pas de v tel que $f_1(v) = w$. En effet, $f_1(v) = v^2$ et un carré est toujours positif.

L'application $\begin{array}{cccc} f_3 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est surjective car pour tout w dans $\mathbb{R}_+$, il existe $v = \sqrt{w}$ tel que $f_3(v) = v^2 = (\sqrt{w})^2 = w$..

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.5

Une application bijective est à la fois injective et surjective donc l'application $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

En effet, elle est injective d'après l'exemple A.2.3 et surjective d'après l'exemple A.2.4.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.6

Dans l'exercice B.2.6 nous avons montré que l'application

$$\begin{array}{cccc} g_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x, y-3x) \end{array}$$

était linéaire. Déterminons son noyau.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$(x,y) \in \text{Ker } g_2 \Longleftrightarrow g_2(x,y) = (0,0,0) \Longleftrightarrow (x+y, 2x, y-3x) = (0,0,0)$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x+y & = & 0 \\ 2x & = & 0 \\ y-3x & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x = y = 0$$

Le seul vecteur du noyau est $(0,0)$ et $\text{Ker } g_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et g_2 est injective.

Que dire de la surjectivité ?

$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces de dimension finie donc d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } g_2 = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \text{Ker } g_2 = \dim \mathbb{R}^2 = 2$$

puisque l'espace vectoriel réduit au vecteur nul est de dimension 0.

Ainsi, $\text{Im } g_2$ est un s.e.v. de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc $\text{Im } g_2 \neq \mathbb{R}^3$ et g_2 n'est pas surjective.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.6

D'après les calculs faits dans l'exercice B.2.6 pour savoir si g_2 était surjective ou non on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\ g_2 &= \{w = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ tel que } \ \gamma = \alpha - 2\beta\} \\ &= \{(\alpha, \beta, \alpha - 2\beta), \ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{\alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, -2), \ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= Vect\{(1, 0, 1), (0, 1, -2)\}\end{aligned}$$

On voit donc que les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, -2)$ sont générateurs de $\mathrm{Im}\ g_2$, on vérifie aisément qu'ils forment une famille libre.

Ainsi, $\{(1, 0, 1), (0, 1, -2)\}$ est une base de $\mathrm{Im}\ g_2$ et on retrouve que $\dim \mathrm{Im}\ g_2 = 2$.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.7

Dans l'exemple A.2.2 nous avons montré que l'application

$$\begin{array}{rccl} g_\alpha : & E & \longrightarrow & E \\ & v & \longmapsto & \alpha.v \quad \text{avec} \quad \alpha \neq 0_K \end{array}$$

était linéaire. Déterminons son noyau. Soit $v \in E$.

$$v \in \text{Ker } g_\alpha \Longleftrightarrow g_\alpha(v) = 0_E \Longleftrightarrow \alpha.v = 0_E \Longleftrightarrow \alpha = 0_K \quad \text{ou} \quad v = 0_E$$

Ici, $\alpha \neq 0_K$ donc nécessairement $v = 0_E$ et Ker $g = \{0_E\}$ et g est injective.

Si E est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang qui permet d'écrire

$$\dim \text{ Im } g_\alpha = \dim E - \dim \text{ Ker } g_\alpha = \dim E$$

puisque l'espace vectoriel réduit au vecteur nul est de dimension 0.

Ainsi, Im g_α est un s.e.v. de E de même dimension que E donc Im $g_\alpha = E$ et g_α est surjective.

Cependant, les homothéties peuvent être définies sur des espaces qui ne sont pas de dimension finie et le théorème du rang ne s'applique plus. Pour savoir si g_α est surjective, il faut revenir à la définition :

Soit $w \in E$ on cherche $v \in E$ tel que $g_\alpha(v) = w$, c'est-à-dire $\alpha.v = w$. Or $\alpha \neq 0_K$ donc il existe $\alpha' \in K$ tel que $\alpha\alpha' = 1_K$. Par suite, si $v = \alpha' w$ alors

$$g_\alpha(v) = \alpha\alpha' w = 1_K w = w$$

et g_α est surjective.
Remarque : $\alpha' = \dfrac{1}{\alpha}$.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Retour au grain

Exemple A.2.7

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.8

Dans l'exemple A.2.2 nous avons montré que l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & y \end{array}$$

était linéaire. Déterminons son noyau.
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \text{Ker } g \iff g(x,y,z) = 0 \iff y = 0$$

donc

$$\begin{array}{rcl} \text{Ker } g & = & \{w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ tel que } \ y = 0\} \\ & = & \{(x,0,z), \ \ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{x(1,0,0) + z(0,0,1), \ \ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \text{Vect } \{(1,0,0),(0,0,1)\} \end{array}$$

On voit donc que les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ sont générateurs de Ker g, on vérifie aisément qu'ils forment une famille libre.

Ainsi, $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ est une base de Ker g et dim Ker $g = 2$ donc g n'est pas injective.

Que dire de la surjectivité ?

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces de dimension finie donc d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } g = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } g = 3 - 2 = 1$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Ainsi, Im g est un s.e.v. de dimension 1 dans $\mathbb{R}$ de dimension 1, donc nécessairement, Im $g = \mathbb{R}$ et g est surjective.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.9

Ecrivons la matrice de l'application linéaire

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & y \end{array}$$

relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$.

Soit donc $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f_1 = (1)$ le vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}$. Il faut calculer les images de e_1, e_2 et e_3 en fonction de f_1.

Il est clair que $g(e_1) = g(e_3) = 0 = 0.f_1$ et $g(e_2) = 1 = 1.f_1$ d'où la matrice

$$A = \text{Mat}\ (g, (e_1, e_2, e_3), (f_1)) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} g(e_1) & g(e_2) & g(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \quad 1 \quad & 0 \end{pmatrix} & f_1 \end{array}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.10

Ecrivons la matrice de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} g_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x, y-3x) \end{array}$$

relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ avec $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1,0)$ et $f_3 = (0,0,1)$, les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

Nous avons

$$\begin{aligned} g_2(e_1) = g_2(1,0) &= (1,2,-3) = f_1 + 2f_2 - 3f_3 \\ g_2(e_2) = g_2(0,1) &= (1,0,1) = f_1 + 0f_2 + f_3 \end{aligned}$$

d'où

$$B = \mathrm{Mat}\,(g_2, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} g_2(e_1) & g_2(e_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \end{array}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.11

Dans l'exercice B.2.5 nous avons montré que la matrice C définie par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension 3 de base respective $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$.

On peut associer à la matrice C l'application linéaire f de E vers E complètement définie par la donnée des images par f des vecteurs (e_1, e_2, e_3) et telle que $C = \mathrm{Mat}\,(f, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & f_1 + f_2 \\ f(e_2) & = & f_3 \\ f(e_3) & = & f_1 - f_2 - 2f_3 \end{array}$$

Et comme la matrice de f est inversible, la fonction f est bijective et f^{-1} est définie par

$$f^{-1}(f_1) \quad = \quad \frac{1}{2}(e_1 + 2e_2 + e_3)$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(f_2) &= \frac{1}{2}(e_1 - 2e_2 - e_3) \\
f^{-1}(f_3) &= e_3
\end{aligned}
$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.12

Soit l'application linéaire

$$g_2 \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x, y-3x) \end{array}$$

dont la matrice relativement aux bases canoniques $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ avec $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1,0)$ et $f_3 = (0,0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \text{Mat } (g_2, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$ et $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$ deux nouvelles bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement, définies par

$$e'_1 = (2,1), \; e'_2 = (3,2), \; f_1 = (1,1,0), f_2 = (0,0,1) \;\text{ et }\; f_3 = (1,-1,-2)$$

Déterminons la matrice $A' = \text{Mat } (g_2, \mathcal{E}', \mathcal{F})'$.

D'après la formule établie précédemment nous avons

$$A' = Q^{-1}AP \;\text{ avec }\; P = P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} \;\text{ et }\; Q = P_{\mathcal{F}\mathcal{F}'}.$$

Par définition, les matrices P et Q valent :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \;\text{ et }\; Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.12

Il faut inverser la matrice Q ce que nous avons déjà fait (cf exercice B.2.5) et qui peut aussi se faire en exprimant les vecteurs f_1, f_2 et f_3 en fonction des vecteurs f_1', f_2' et f_3' puisque Q^{-1} est la matrice de passage entre les bases $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$.

De toutes les façons on trouve

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{11}{2} \\ -6 & -8 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.2.13

Déterminons le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{34}(K)$$

On sait que

$$\text{rg } A \;\leq\; \min(3,4) = 3$$

et que

$$\text{rg } A = \dim \text{ Vect } \{C_1, C_2, C_3, C_4\} = \dim \text{ Vect } \{L_1, L_2, L_3\}$$

Or on constate que $L_2 = L_3 + 2L_1$ donc Vect $\{L_1, L_2, L_3\}$ = Vect $\{L_1, L_3\}$ et comme L_1 et L_3 ne sont ni nulles, ni proportionnelles, $\{L_1, L_2\}$ est libre donc

$$\text{rg } A = 2$$

.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.3 Exemples du chapitre III

Exemple A.3.1

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Calculons le déterminant de A en le développant par rapport à la 1ère ligne.

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}(a_{11}) \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}(a_{12}) \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{1+3}(a_{13}) \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{1}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}
\end{aligned}$$

Dans le cas où la matrice est carrée d'ordre 3, il existe une autre façon de présenter ce calcul que l'on appelle la règle de Sarrus. (cf cours en présentiel)

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.2

Le calcul du déterminant des matrices diagonales ou traingulaires se prête très bien au développement par rapport à une ligne ou à une colonne à cause du grand nombre de zéros contenus dans ces matrices.

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit des termes diagonaux :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Il suffit de développer chaque déterminant par rapport à la première colonne.

En transposant, on obtient que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est égal au produit des termes diagonaux.

Les matrices diagonales étant des matrices triangulaires particulières, leur déterminant est égal au produit des termes diagonaux.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.3

Calculons le déterminant de la matrice

$$Z = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 3 & 3 & \lambda \end{pmatrix}$$

Nous allons essayer de faire apparaitre des zéros grâce aux opérations autorisées sur les lignes ou colonnes.

$$\begin{aligned}
\det Z &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 3 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 2 \\ 1-\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en remplaçant } C_1 \text{ par } C_1 - C_2 \text{ pour annuler le 3 de } C_1. \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \text{ en factorisant } C_1 \text{ par } (\lambda-1) \\
&= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ 0 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \text{ en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2+L_1. \\
&= (\lambda-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à } C_1. \\
&= (\lambda-1)[\lambda(\lambda+1)-3] = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-3)
\end{aligned}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.3.4

Pour savoir si l'endomorphisme f associé à la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

est bijectif, il suffit de calculer $\det T$. Or T étant triangulaire, son déterminant est égal au produit des termes diagonaux et

$$\det T = 1 \times 0 \times 12 = 0$$

donc T n'est pas inversible et f n'est pas bijectif.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.4 Exemples du chapitre IV

Exemple A.4.1

Soit à résoudre le système d'équations linéaires :

$$(I)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} \boxed{5}x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1 \\ 5x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & = & -1 & l_2 \\ -4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 & l_3 \end{array}\right.$$

$$(I) \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l'_1 \leftarrow l_1 \\ & & \boxed{-8}x_2 & + & x_3 & = & -13 & l'_2 \leftarrow l_2 - \frac{5}{5}l_1 \\ & & \frac{18}{5}x_2 & + & \frac{9}{5}x_3 & = & \frac{63}{5} & l'_3 \leftarrow l_3 - \frac{-4}{5}l_1 \end{array}\right.$$

$$(I) \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l''_1 \leftarrow l_1 \\ & & -8x_2 & + & x_3 & = & -13 & l''_2 \leftarrow l'_2 \\ & & & & \frac{9}{4}x_3 & = & \frac{27}{4} & l''_3 \leftarrow l'_3 - \frac{(\frac{18}{5})}{-8}l'_2 \end{array}\right.$$

On obtient un système triangulaire qui se résoud facilement :

$$(I) \quad \Longleftrightarrow \quad x_3 = 3 \;\; x_2 = 2 \;\; x_1 = 1$$

Le 5 encadré est appelé le premier pivot. Le -8 encadré est appelé le deuxième pivot.

Un des intérets de cette méthode est que l'on raisonne par équivalence. En effet les systèmes successifs ont exactement le même ensemble solution.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.2

Soit à résoudre le système d'équations linéaires :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} [5]x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -1 & l_2 \\ -4x_1 & - & \frac{8}{5}x_2 & + & x_3 & = & 3 & l_3 \end{array} \right.$$

$$(II) \quad \iff \left\{ \begin{array}{cccccccl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1' \leftarrow l_1 \\ & & & & x_3 & = & -13 & l_2' \leftarrow l_2 - \frac{5}{5}l_1 \\ & & & & \frac{9}{5}x_3 & = & \frac{63}{5} & l_3' \leftarrow l_3 - \frac{-4}{5}l_1 \end{array} \right.$$

$$(II) \quad \iff \left\{ \begin{array}{cccccccl} 5x_1 & + & x_3 & + & 2x_2 & = & 12 & l_1' \leftarrow l_1 \\ & & & & [1]x_3 & = & -13 & l_2' \leftarrow l_2 \\ & & & & 0 & = & 36 & l_3' \leftarrow l_3 - \frac{-9}{5}l_2 \end{array} \right.$$

Le système n'a donc pas de solution, on dit aussi qu'il est impossible.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.3

Soit à résoudre le système d'équations linéaires :

$$(III)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} [5]x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l_1 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 & l_2 \\ -5x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 8 & l_3 \end{array}\right.$$

$$(III)\quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l'_1 \leftarrow l_1 \\ & & [-3]x_2 & + & x_3 & = & -10 & l'_2 \leftarrow l_2 - \frac{5}{5}l_1 \\ & & 6x_2 & - & 2x_3 & = & 20 & l'_3 \leftarrow l_3 - \frac{-5}{5}l_1 \end{array}\right.$$

$$(III)\quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 12 & l''_1 \leftarrow l'_1 \\ & & -3x_2 & + & x_3 & = & -10 & l''_2 \leftarrow l'_2 \\ & & & & 0 & = & 0 & l''_3 \leftarrow l'_3 - \frac{6}{-3}l'_2 \end{array}\right.$$

$$(III)\quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} 5x_1 & + & 2x_2 & = & 12 - x_3 \\ & & -3x_2 & = & -10 - x_3 \end{array}\right.$$

$$(III)\quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{15}(16 - 5x_3) \\ \\ x_2 & = & \frac{1}{3}(10 + x_3) \end{array}\right.$$

Le système a donc une infinité de solution.

$$S = \left\{\left(\frac{16}{15}, \frac{10}{3}, 0\right) + x_3(-1, 1, 3)/x_3 \in K\right\}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.4

On se propose de résoudre par la méthode de Cramer le système à trois équations, trois inconnues :

$$(S)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x-5y+2z & = & 7 \\ x+2y-4z & = & 3 \\ 3x-4y-6z & = & 5 \end{array} \right.$$

La matrice associée à ce système est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est égal à

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -9 & 10 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & -10 & 6 \end{vmatrix} \\ & \quad \text{en remplaçant } L_1 \text{ par } L_1 - 2L_2 \text{ et } L_3 \text{ par } L_3 - 3L_2 \\ &= (-1)^{2+1} \times 1 \begin{vmatrix} -9 & 10 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} \\ & \quad \text{en développant par rapport à la 1ère colonne} \\ &= -(-54+100) = -46 \neq 0 \end{aligned}$$

Le déteminant de A n'est pas nul donc d'après le théorème IV.2 les solutions sont (x, y, z) avec

$$x = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} \quad y = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} \quad \text{et } z = -\frac{1}{46} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

Exemple A.4.4

Calculons x

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{46}\times 2\begin{vmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en factorisant la dernière colonne par 2} \\
&= -\frac{1}{23}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 17 & -8 & -2 \\ 26 & -19 & -3 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en remplaçant } C_1 \text{ par } C_1 - 7C_3 \text{ et } C_2 \text{ par } C_2 + 5C_3 \\
&= -\frac{1}{23}(-1)^{1+3}\times 1\begin{vmatrix} 17 & -8 \\ 26 & -19 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en développant par rapport à la 1ère ligne} \\
&= -\frac{1}{23}(17\times(-19)+8\times 26) = 5
\end{aligned}$$

Calculons y

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -\frac{1}{46}\times 2\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en factorisant la dernière colonne par 2} \\
&= -\frac{1}{23}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 13 & 0 \\ 9 & 26 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad \text{en remplaçant } L_2 \text{ par } L_2 + 2L_1 \text{ et } L_3 \text{ par } L_3 + 3L_1 \\
&= -\frac{1}{23}(-1)^{1+3}\times 1\begin{vmatrix} 4 & 13 \\ 9 & 26 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.4.4

$$
\begin{aligned}
& \text{en développant par rapport à la dernière colonne} \\
= & -\frac{1}{23}(4 \times 26 - 9 \times 13) = 1
\end{aligned}
$$

Calculons z

$$
\begin{aligned}
z = & -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{46}\begin{vmatrix} 0 & -9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -4 \end{vmatrix} \\
& \text{en remplaçant } L_1 \text{ par } L_1 - 2L_2 \text{ et } L_3 \text{ par } L_3 - 3L_2 \\
= & -\frac{1}{46}(-1)^{2+1} \times 1 \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -10 & -4 \end{vmatrix} \\
& \text{en développant par rapport à la 1ère colonne} \\
= & \frac{1}{46}(-9 \times (-4) + 10 \times 1) = 1
\end{aligned}
$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

A.5 Exemples du chapitre V

Exemple A.5.1

Soit E de dimension 3 dont $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base.

Soit f un endomorphisme de E, défini par :

$$\text{Mat } (f, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Recherchons les valeurs propres de f. Soit $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ on a

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id}_E)(v) = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_3)v = 0,$$

d'où

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (2-\lambda)x + 4z & = & 0 \\ 3x + (-4-\lambda)y + 12z & = & 0 \\ x - 2y + (5-\lambda)z & = & 0 \end{array} \right.$$

$(0, 0, 0)$ est une solution évidente de ce système. Ce triplet ne sera pas la seule solution si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif donc, puisqu'on est en dimension finie si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas bijectif, ce qui est équivalent au fait que la matrice

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.1

$(A - \lambda I_3)$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si et seulement si son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou encore, d'après les calculs effectués dans l'exercice B.3.3, si et seulement si,

$$-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0.$$

Les valeurs propres de f sont donc $0, 1$ et 2.

Retour au grain

Exemple A.5.2

Déterminons les espaces propres associés aux valeurs propres de la matrice

$$A = \text{Mat}\,(f, \mathcal{E}) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

calculées dans l'exemple A.5.1 et qui valent 0, 1 et 2.

1. Pour $\lambda = 0$ on doit résoudre
$$\left\{\begin{array}{ccc} 2x+4z & = & 0 \\ 3x-4y+12z & = & 0 \\ x-2y+5z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -2z \\ y & = & \frac{3}{2}z \\ -2z-3z+5z & = & 0 \end{array}\right.$$
Donc $E_0 = \{(-2z, \frac{3}{2}z, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,\{(-4,3,2)\}$.
2. Pour $\lambda = 1$ on doit résoudre
$$\left\{\begin{array}{ccc} x+4z & = & 0 \\ 3x-5y+12z & = & 0 \\ x-2y+4z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -4z \\ y & = & 0 \\ -4z+0+4z & = & 0 \end{array}\right.$$
Donc $E_1 = \{(-4z, 0, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,\{(-4,0,1)\}$.
3. Pour $\lambda = 2$ on doit résoudre
$$\left\{\begin{array}{ccc} 4z & = & 0 \\ 3x-6y+12z & = & 0 \\ x-2y+3z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} z & = & 0 \\ x & = & 2y \\ 2y-2y+0 & = & 0 \end{array}\right.$$
Donc $E_2 = \{(2y, y, 0), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,\{(2,1,0)\}$.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.3

Nous allons calculer le polymôme caractéristique des endomorphismes associés aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Au cours de l'exemple A.5.1 nous avons calculé le polymôme caractéristique de l'endomorphisme associé à la matrice A. Nous avons obtenu $P_A(x) = -x(x-1)(x-2)$. On remarque que P_A est scindé dans $\mathbb{R}$ et que 0, 1 et 2 sont les trois valeurs propres de A, chacune étant de multiplicité 1.

On note que $0+1+2 = 3 = 2-4+5 = Tr(A)$. De plus on a det $(A) = 0 \times 1 \times 2 = 0$ et A n'est pas inversible.

Pour la matrice C, nous avons $P_C(x) = \det(C - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 6 & -3 & -1-x \end{vmatrix} = -(2-x)^2(1+x)$ puisque la matrice est triangulaire inférieure. On remarque que P_C est scindé dans $\mathbb{R}$ et les valeurs propres de C sont donc 2 (valeur propre double) et -1 (valeur propre simple).

On remarque que les valeurs propres sont sur la diagonale de C donc leur somme vaut $Tr(C)$ et leur produit vaut $\det C$.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.4

La question est de savoir si les endomorphismes associés aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sont diagonalisables.

1. Etude de A et de l'endomorphisme f associé : Nous avons $P_A(x) = -x(x-1)(x-2)$ (cf exemple A.5.1) dont les racines sont $0, 1$ et 2. Le polynôme caractéristique a donc $3 = \dim E$ racines distinctes donc, d'après le corollaire V.7, f est diagonalisable et il existe une base $\mathcal{V}$, formée de vecteurs propres de f, dans laquelle la matrice de f est diagonale.

   D'après les calculs de l'exemple A.5.2 nous avons

$$\begin{aligned} E_0 &= \text{Vect } \{(-4,3,2)\} = \text{Vect } \{v_0\} \\ E_1 &= \text{Vect } \{(-4,0,1)\} = \text{Vect } \{v_1\} \\ E_2 &= \text{Vect } \{(2,1,0)\} = \text{Vect } \{v_2\}. \end{aligned}$$

   Or

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ en remplaçant la colonne 1 par } C_1 - 2C_2 \\ &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \text{ en développant par rapport à la ligne 3} \\ &= 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.4

Donc la famille $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, v_2\}$ est une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 donc $\mathcal{V}$ est une base de E et

$$A' = \text{Mat }(f, \mathcal{V}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De plus, par la formule du changement de base,

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathcal{E}\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Etude de C et de l'endomorphisme g associé : Nous avons $P_C(x) = -(x+1)(x-2)^2$ (cf exemple B.5.3), avec 2 valeur propre double et -1 valeur propre simple. Le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$ et pour savoir si g est diagonalisable, il faut regarder si la dimension des espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres.
   (a) -1 est une valeur propre simple donc $\dim E_{-1} = 1$. On peut calculer le vecteur propre associé et on obtient $E_{-1} = \text{Vect }\{(0,0,1)\} = \text{Vect }\{w_1\}$.

   (b) 2 est valeur propre double, il faut calculer la dimension de E_2.

   $$(x,y,z) \in E_2 \iff 6x - 3y - 3z = 0 \iff 2x - y = z$$

   Ainsi, $E_2 = \text{Vect }\{(1,0,2);(0,1,-1)\} = \text{Vect }\{w_2, w_3\}$. Les vecteurs w_2 et w_3 ne sont ni nuls ni colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de E_2 qui est donc de dimension 2.
   Ainsi, nous avons $\dim E_{-1} = 1 = m_{-1}$ et $\dim E_2 = 2 = m_2$. Par suite, l'endomorphisme g est diagonalisable dans une base de vecteurs propres.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.4

De plus, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

La famille $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ est donc une famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 donc $\mathcal{W}$ est une base de E et par la formule du changement de base on a

$$C' = \text{Mat }(g, \mathcal{W}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Q^{-1}BQ \quad \text{avec} \quad Q = P_{\mathcal{E}\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Etude de J et de l'endomorphisme u associé :
   Calculons le polynôme caractéristique de la matrice J :

$$P_J(x) = \det(J - xI) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} = (-x)(2-x) + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

   Ainsi, P_J est scindé dans $\mathbb{R}$ et 1 est valeur propre double de J. Pour savoir si u est diagonalisable ou pas, il faut comparer la dimension de E_1 avec la multiplicité de la valeur propre 1.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.4

Déterminons E_1 :

$$(x,y) \in E_1 \iff -x+y=0 \iff x=y$$

Donc $E_1 = \text{Vect}\,\{(1,1)\}$ qui est donc de dimension 1 puisque le vecteur $(1,1)$ n'est pas nul.

Ainsi, $\dim E_1 = 1 \neq m_1 = 2$ donc u n'est pas diagonalisable.

Retour au grain

Exemple A.5.5

Calculons A^m avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

D'après l'exemple A.5.4, on sait que : $D = P^{-1}AP$, c'est à dire $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $A^m = PD^mP^{-1}$ d'où

$$\begin{aligned} A^m &= \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 + 3\ 2^m & 8 - 2^{m+2} & -20 + 3\ 2^{m+2} \\ 3\ 2^{m-1} & -2^{m+1} & 3\ 2^{m+1} \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.6

Soit à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x(t) & & & + & 4z(t) & = & x'(t) \\ 3x(t) & - & 4y(t) & + & 12z(t) & = & y'(t) \\ x(t) & - & 2y(t) & + & 5z(t) & = & z'(t) \end{array}\right. \Longleftrightarrow X'(t) = AX(t)$$

En multipliant à gauche les deux membres de l'égalité $X'(t) = AX(t)$ par la matrice P^{-1} et en posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t) \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient $Y'(t) = DY(t)$ qui sécrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \\ z_1'(t) \end{pmatrix}$$

et qui conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 0 \\ y_1'(t) & = & y_1(t) \\ z_1'(t) & = & 2z_1(t) \end{array}\right.$$

dont les solutions sont :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & c_1 \\ y_1(t) & = & c_2e^t \\ z_1(t) & = & c_3e^{2t} \end{array}\right.$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.6

où c_1, c_2, c_3 sont des scalaires.

On obtient $X(t)$ en écrivant $X(t) = PY(t)$. C'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} x(t) & = & -4c_1 & - & 4c_2e^t & + & 2c_3e^{2t} \\ y(t) & = & 3c_1 & & & + & c_3e^{2t} \\ z(t) & = & 2c_1 & + & c_2e^t & & \end{array} \right.$$

où c_1, c_2, c_3 sont des scalaires.

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exemple A.5.7

Soit les suites récurrentes $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par :

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in K^3 \; et \; \forall n \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} u_{n+1} & = & 2u_n & & & + & 4w_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n & - & 4v_n & + & 12w_n \\ w_{n+1} & = & u_n & - & 2v_n & + & 5w_n \end{array} \right.$$

Soit X_n le vecteur $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n = A^n X_0$.

Ce qui donne d'après les calculs de l'exemple A.5.5

$$X_n = \begin{pmatrix} -4+3\;2^n & 8-2^{n+2} & -20+3\;2^{n+2} \\ 3\;2^{n-1} & -2^{n+1} & 3\;2^{n+1} \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} u_n & = & -4+3\;2^n\;u_0 & + & 8-2^{n+2}\;v_0 & - & 20+3\;2^{n+2}\;w_0 \\ v_n & = & 3\;2^{n-1}u_0 & - & 2^{n+1}v_0 & + & 3\;2^{n+1}w_0 \\ w_n & = & u_0 & - & 2v_0 & + & 5w_0 \end{array} \right.$$

Retour au grain

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B

Exercices

B.1 Exercices du chapitre I

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.1.1

Vérifier que $(\mathbb{R}^3, +, .)$ défini dans l'exemple A.1.1 est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.1.2

Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont des sous-espaces vectoriels ?

$$\begin{aligned} E_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y-z=0\} \\ E_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy=0\} \\ E_5 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(0)=1\} \\ E_6 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(1)=0\} \end{aligned}$$

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.1.3

Montrer que les vecteurs $\alpha_1 = (1, 1, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1)$ et $\alpha_3 = (1, -1, -2)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.1.4

Montrer que les vecteurs $\alpha_1 = (1,1,0)$, $\alpha_2 = (0,0,1)$ et $\alpha_3 = (1,-1,-2)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.1.5

Montrer que

$$K_n[x] = \{P \ \in \ K[x] \ \text{ avec } \ \deg P \leq n\}$$

est un s.e.v. de $K[x]$ et donner une base de ce s.e.v.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.1.6

1. La famille $\mathcal{F} = \{(2,-3),(-6,12)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?
2. Quel est le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{G} = \{(2,-1,3),(5,2,-1),(9,0,5)\}$?

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.2 Exercices du chapitre II

Exercice B.2.1

Calculer ${}^t\Omega + \Delta$. Que remarquez-vous ?

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.2

Calculer $-5.\Delta$.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.3

Calculer $\Delta\Omega$. Comparer ce résultat avec le produit $\Omega\Delta$.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.4

Calculer ${}^t\Delta {}^t\Omega$. Comparer ce résultat avec le produit $\Omega\Delta$.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.5

La matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Si oui, donner C^{-1}.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.6

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, dites si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1. $$\begin{array}{rccl} g_1 : & K[x] & \longrightarrow & K[x] \\ & P & \longmapsto & P' \text{ dérivée de } P \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rccl} g_2 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x, y-3x) \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rccl} g_3 : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x+1, y-3x) \end{array}$$

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.7

Pour chacune des deux applications linéaires suivantes, déterminer le noyau, l'image et le rang et préciser, le cas échéant, si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1. $$\begin{array}{rccc} h_1 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-z) \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rccc} h_2 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+2y-z, y+z, x+y-z) \end{array}$$

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.8

Ecrire les matrices des applications linéaires définies dans l'exercice B.2.7 relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.2.9

Soit Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui même dont la matrice relativement à la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \text{Mat }(\phi, \mathcal{E})$$

où $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 0),\ e_2 = (0, 1)$.

Ecrire la matrice de Φ relativement à la base $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = (2, 1),\ e'_2 = (3, 2)$.

Retour au grain

Solution

Exercice B.2.10

Calculer le rang de la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.3 Exercices du chapitre III

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de A en le développant par rapport à la 1ère ligne, puis en appliquant la règle de Sarrus.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3.2

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix}$$

Indications : Faire apparaître des zéros dans la première colonne en utilisant le 1, développer selon cette colonne et recommencer.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.3.3

1. Pour quelles valeurs de λ la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

   est-elle inversible ?

2. Même question pour la matrice

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.4 Exercices du chapitre IV

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.4.1

Résoudre par la méthode du pivot les systèmes suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ -4x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & -1 \\ 2x & + & y & + & 2z & & & = & 4 \\ -2x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

et

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 3y & = & -1 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$$

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

B.5 Exercices du chapitre V

Exercice B.5.1

Soit f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donner les valeurs propres de f.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5.2

Déterminer les espaces propres associés aux valeurs propres de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

calculées dans l'exercice B.5.1 et qui valent 1 et -2.

Retour au grain

Solution

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Exercice B.5.3

Calculer le polynôme caractéristique des endomorphismes g et h canoniquement associés aux matrices

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Retour au grain

Solution

Exercice B.5.4

Les endomorphismes g, h et k dont les matrices respectives dans la base canonique sont

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont-ils diagonalisables ?

1. Si vous ne savez pas comment démarrer voir aide 1
2. Pour la solution de la matrice B voir aide 2
3. Pour la solution de la matrice H voir aide 3
4. Pour la solution pour la matrice K voir aide 4

Retour au grain

Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre I

Document C.1.1 Démonstration du théorème I.1

Soit $(F, +, .)$ un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(E, +, .)$. Alors F n'est pas vide et pour tous v_1, v_2 de F et tout λ de K on a

$$\lambda.v_1 + v_2 \in F$$

Prenons $\lambda = 1$ on obtient $v_1 + v_2 \in F$ et $+$ est une loi interne, associative et communtative comme dans E.

Si on prend $\lambda = -1$ et $v_1 = v_2$ on obtient $0_E = -v_1 + v_1 \in F$ donc $0_E \in F$ et il est le neutre pour $+$ dans F.

En prenant $\lambda = -1$ et $v_2 = 0_E$ on obtient $-v_1 + 0_E \in F$ soit que le symétrique de tout élément de F est dans F. $(F, +)$ est donc un groupe commutatif.

Enfin, en prenant λ quelconque et $v_2 = 0_E$ on obtient $\lambda.v_1 + 0_E \in F$ soit que . est une loi externe qui a évidemment les mêmes propriétés dans F que dans E donc $(F, +, .)$ est un $K-$ espace vectoriel.

Retour au théorème I.1 ▲

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Démonstration du théorème I.2

$$\text{Vect }(A) = \left\{ \sum_{\substack{i \ \in J, \\ J \subset \mathbb{N}, \\ J \ \text{fini}}} \lambda_i x_i \ / \ \forall i \in J \ , \ \lambda_i \in K \ , \ x_i \in A \right\}$$

$\forall x_i \in A, x_i = 1x_i$ et x_i s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de A, donc $x_i \in$ Vect (A). Par suite, $A \subset$ Vect (A) qui est donc non vide.

Soient $v_1 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m$ et $v_2 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + ... + \mu_p x_p$ deux éléments de A et λ un scalaire, alors

$$\lambda v_1 + v_2 = \lambda\lambda_1 x_1 + \lambda\lambda_2 x_2 + ... + \lambda\lambda_m x_m + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + ... + \mu_p x_p$$

donc $\lambda v_1 + v_2$ s'écrit comme une somme finie d'éléments de A multipliés par des scalaires donc $\lambda v_1 + v_2 \in$ Vect (A).

Par suite, Vect (A) est non vide et stable pour les lois + et ., c'est donc un s.e.v. de E.

Il reste à montrer que c'est le plus petit : Soit donc H, un s.e.v. de E qui contient A. Soit $v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m \in$ Vect (A) avec $\forall i, x_i \in A$.

Puisque $A \subset H$, $\forall i, x_i \in H$, et en tant que s.e.v. de E, H est stable pour les lois + et .. Ainsi, $v \in H$ et Vect $(A) \subset H$.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

On vient de montrer que tout s.e.v. de E contenant A contient aussi Vect (A), donc Vect (A) est bien le plus petit s.e.v. de E contenant A.

Retour au théorème I.2 ▲

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.3 Démonstration du théorème I.3

1. Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ soit une base de E.

   $\mathcal{B}$ est un système générateur donc

   $$\forall v \in E, \quad \exists \quad \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \in K^n \quad \text{tels que} \quad v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

   Supposons qu'il existe une autre écriture de ce même vecteur v :

   $$v = \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \cdots + \lambda'_n e_n$$

   alors

   $$\begin{aligned} & \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \lambda'_1 e_1 + \lambda'_2 e_2 + \cdots + \lambda'_n e_n \\ \iff \quad & (\lambda_1 - \lambda'_1) e_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2) e_2 + \cdots + (\lambda_n - \lambda'_n) e_n = 0_E \\ \iff \quad & \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \lambda_i - \lambda'_i = 0 \quad \text{puisque} \quad \mathcal{B} \quad \text{est libre} \\ \iff \quad & \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \lambda_i = \lambda'_i \end{aligned}$$

   d'où l'unicité de l'écriture.

2. Supposons maintenant que tout vecteur de E s'écrive de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

   Ceci signifie en particuclier que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice. Montrons qu'elle est libre. Soit donc un combinaison linéaire nulle des e_i.

   $$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

or il est clair que

$$0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_n = 0_E$$

et par unicité de l'écriture, les λ_i sont forcément nuls et $\mathcal{B}$ est un système libre. Par suite, puisque nous avons déjà montré que $\mathcal{B}$ est générateur , $\mathcal{B}$ est une base.

Retour au théorème I.3 ▲

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C.2 Documents du chapitre II

Document C.2.1 Démonstration du théorème II.2.1

1. Ker $g \subset E$ est non vide car $g(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in$ Ker g.
   Pour tous v et v' dans Ker g et tout $\lambda \in K$ on a
   $$g(\lambda.v + v') = \lambda.g(v) + g(v') = \lambda.0_E + 0_E = 0_E$$
   donc $\lambda.v + v' \in$ Ker g.

   Ker g est non vide et stable pour les lois $+$ et $.$ de E alors Ker g est un s.e.v de E.
2. Im $g \subset F$ est non vide car $g(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in$ Im g.
   Pour tout $w \in$ Im g, il existe $v \in E$ tel que $g(v) = w$. De même, pour tout $w' \in$ Im g, il existe $v' \in E$ tel que $g(v') = w'$ et pour tout $\lambda \in K$
   $$g(\lambda.v + v') = \lambda.g(v) + g(v') = \lambda.w + w'$$
   et $\lambda.w + w'$ appartient à Im g.

   Im g est non vide et stable pour les lois $+$ et $.$ de F alors Im g est un s.e.v de F.
3. Supposons que g est surjective alors
   $$\forall w \in F, \exists\ v \in E \ \text{ tel que } \ w = g(v)$$
   et $F \subset$ Im g donc Im $g = F$

   Supposons que Im $g = F$ alors
   $$\forall w \in \text{Im } g = F, \exists v \in E \ \text{ tel que } \ w = g(v)$$
   et g est surjective.
   Par suite g est surjective $\Longleftrightarrow$ Im $g \ = \ F$.

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

4. Supposons que g soit injective. Alors

$$\forall (v, v') \in E^2 \quad g(v) = g(v') \Longrightarrow v = v'$$

En particulier, si $v \in \text{Ker } g$ alors $g(v) = 0_F = g(0_E)$ et comme g est injective,

$$g(v) = g(0_E) \Longrightarrow v = 0_E \ \text{ donc } \ \text{Ker } g = \{0_E\}.$$

Supposons que $\text{Ker } g = \{0_E\}$. Soit v et v' deux vecteurs de E tels que $g(v) = g(v')$, alors

$$g(v) = g(v') \Longleftrightarrow g(v) - g(v') = 0_F \Longleftrightarrow g(v - v') = 0_F \Longleftrightarrow v - v' \in \text{Ker } g \Longleftrightarrow v - v' = 0_E \Longleftrightarrow v = v'$$

et g est injective.

Par suite g est injective $\Longleftrightarrow \text{Ker } g = \{0_E\}$

Retour au théorème II.2.1 ▲

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.2.2 Démonstration du corollaire II.2.3

1. Il est clair que 1. $\Longrightarrow$ 2.
2. Si g est injective, alors $\dim \operatorname{Ker} g = 0$ et d'après le théorème du rang,

   $$\dim \operatorname{Im} g = \dim E = n = \dim F$$

   donc $F = \operatorname{Im} g$ et g est surjective.
3. Si g est surjective alors $F = \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{rg} g = \dim F = n$.
4. Si $\operatorname{rg} g = n$ alors $\dim \operatorname{Im} g = n = \dim F$ donc $F = \operatorname{Im} g$ et g est surjective. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} g = 0$ donc $\operatorname{Ker} g = \{0_E\}$ et g est injective. Par suite, elle est bijective.

Retour au corollaire II.2.3 ▲

C.3 Documents du chapitre IV

Document C.3.1 Démonstration du théorème IV.2

On sait que :

$$det\ A \neq 0 \iff A\ inversible$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (S) \iff & AX = B \\ \iff & A^{-1}AX = A^{-1}B \\ \iff & X = A^{-1}B \end{aligned}$$

Donc (S) a une unique solution si et seulement si det $A \neq 0$.

Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est solution alors on peut écrire le système (S) sous forme vectorielle :

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_nA_n = B$$

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \det\,(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n) &= \det\,(A_1, ..., A_{i-1}, x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_nA_n, A_{i+1}, ..., A_n) \\ &= \sum_{j=1}^{j=n} x_j \det\,(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, ..., A_n) \\ &\quad \text{en utilisant la linéarité par rapport à la variable numéro } i \\ &= x_i \det\,(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, ..., A_n) \\ &\quad \text{puisqu'un déterminant est nul dès que deux colonnes sont égales} \\ &= x_i \det\,A \end{aligned}$$

D'où

$$x_i = \frac{\det\,(A_1, A_2, ..., A_{i-1}, B, A_{i+1}, ..., A_n)}{\det\,A}$$

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Retour au théorème IV.2 ▲

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

C.4 Documents du chapitre V

Document C.4.1 Démonstration du théorème V.4

Nous avons déjà remarqué que

$$f(v) = \lambda v \Longleftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id}_E) \text{ non bijectif } \Longleftrightarrow \det(f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0$$

donc

$$f(v) = \lambda v \Longleftrightarrow P_f(\lambda) = 0$$

Retour au théorème V.4 ▲

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.4.2 Démonstration de la propriété V.5

- Si dim $E = n$, alors P_f est une fonction polynôme de degré n qui a donc au maximum n racines, par suite, f a au plus n valeurs propres.
  - Une fonction polynôme scindée possède exactement n racines, distinctes ou non et la somme de leur multiplicité vaut n, le degré de P_f.
  - Le fait que la somme des valeurs propres soit égale à la trace de A et que le produit soit égal au déterminant vient des relations entre les coefficients d'une fonction polynôme et ses racines que nous n'avons pas étudié.

Retour à la propriété V.5 ▲

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Document C.4.3 Démonstration du corollaire V.7

P_f possède $n = \dim E$ racines distinctes donc il est scindé dans $\mathbb{R}$. De plus, f n'admet que des valeurs propres simples et pour chacune d'elles, l'espace propre associé est de dimension 1, égale à la multiplicité. D'après le théorème V.6, f est diagonalisable.

Retour au corollaire V.7 ▲

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Index des notions

N

P

R

S

V

Sommaire
Concepts
Notions

Exemples
Exercices
Documents

Solution de l'exercice B.1.1

Soit $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$, muni des lois $+$ et $.$ définies pour tous $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ de $\mathbb{R}^3$ et tout λ de $\mathbb{R}$ par

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \quad \text{et} \quad \lambda.(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

La loi interne est commutative et associative parce que l'addition de $\mathbb{R}$ possède ces propriétés.

Elle admet un neutre qui est $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$ puisque

$$(x, y, z) + (0, 0, 0) = (x + 0, y + 0, z + 0) = (x, y, z).$$

Enfin, tout élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ admet un symétrique qui est $(-x, -y, -z)$ puisque

$$(x, y, z) + (-x, -y, -z) = (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

D'autre part, pour vérifier que la loi externe a les propriétés requises, il suffit d'écrire les formules et utiliser le fait que la multiplication dans $\mathbb{R}$ est distributive par rapport à l'addition et admet le réel 1 comme neutre.

En effet pour tous $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ de $\mathbb{R}^3$ et tous λ, μ de $\mathbb{R}$ nous avons

1. $\lambda.(v_1 + v_2) = \lambda.(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (\lambda(x_1 + x_2), \lambda(y_1 + y_2), \lambda(z_1 + z_2)) = (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda y_1 + \lambda y_2, \lambda z_1 + \lambda z_2)$
   $= (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) + (\lambda x_2, \lambda y_2, \lambda z_2) = \lambda.(x_1, y_1, z_1) + \lambda.(x_2, y_2, z_2) = \lambda.v_1 + \lambda.v_2$
2. $(\lambda + \mu).v_1 = (\lambda + \mu).(x_1, y_1, z_1) = ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)y_1, (\lambda + \mu)z_1) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda y_1 + \mu y_1, \lambda z_1 + \mu z_1)$
   $= (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) + (\mu x_1, \mu y_1, \mu z_1) = \lambda.(x_1, y_1, z_1) + \mu.(x_1, y_1, z_1) = \lambda.v_1 + \mu.v_1$
3. $(\lambda\mu).v_1 = (\lambda\mu).(x_1, y_1, z_1) = ((\lambda\mu)x_1, (\lambda\mu)y_1, (\lambda\mu)z_1) = (\lambda\mu x_1, \lambda\mu y_1, \lambda\mu z_1) = \lambda.(\mu x_1, \mu y_1, \mu z_1) = \lambda.(\mu.(x_1, y_1, z_1))$
   $= \lambda.(\mu.v_1)$
4. $1.v_1 = 1.(x_1, y_1, z_1) = (1x_1, 1y_1, 1z_1) = (x_1, y_1, z_1) = v_1.$

Ainsi $(\mathbb{R}^3, +, .)$ est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.1.2

– Etude de $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y-z=0\}$:

E_3 est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, est-ce un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

$0+0-0=0$ donc $(0,0,0) \in E_3$ et E_3 n'est pas vide.

Soient $v=(x,y,z)$ et $v'=(x',y',z')$ dans E_3 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme pour l'exercice A.1.5 on a $\lambda.v+v' = (\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z')$ et

$$(\lambda x+x')+(\lambda y+y')-(\lambda z+z') = \lambda x+\lambda y-\lambda z+x'+y'-z' = \lambda(x+y-z)+(x'+y'-z') = \lambda 0+0 = 0$$

puisque v et v' sont dans E_3.

Par suite $\lambda.v+v' \in E_3$ et E_3 est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

– Etude de $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy=0\}$:

E_4 est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, est-ce un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$?

$0 \times 0 = 0$ donc $(0,0) = 0_{\mathbb{R}^2} \in E_4$ et E_4 n'est pas vide.

Soient $v=(x,y)$ et $v'=(x',y')$ dans E_4 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour savoir si $\lambda.v+v' = (\lambda x+x', \lambda y+y') \in E_4$, il faut effectuer le produit $(\lambda x+x')(\lambda y+y')$ et regarder s'il est nul.

$$(\lambda x+x')(\lambda y+y') = \lambda^2 xy+\lambda xy'+\lambda x'y+x'y'$$

et comme v et v' sont dans E_4, il est clair que $\lambda^2 xy = x'y' = 0$ mais il n'y a aucune raison pour que le terme $\lambda xy'+\lambda yx'$ soit nul. C'est que E_4 n'est pas un s.e.v., il suffit donc de trouver un contre exemple.

$(0,1) \in E_4$ car $0 \times 1 = 0$, de même $(1,0) \in E_4$ et $(0,1)+(1,0) = (1,1)$ et $1 \times 1 = 1 \neq 0$ donc E_4 n'est pas stable pour la loi $+$, ce n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

- Etude de $E_5 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(0) = 1\}$

  E_5 est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est-ce un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

  Les fonctions de E_5 sont celles qui valent 1 en 0. La fonction identiquement nulle, neutre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vaut 0 en 0 et n'appartient donc pas à E_5 qui ne peut pas être un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Etude de $E_6 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(1) = 0\}$

  E_6 est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est-ce un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

  Les fonctions de E_6 sont celles qui valent 0 en 1. La fonction identiquement nulle, neutre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vaut 0 en 1 et appartient donc à E_6 qui n'est pas vide.

  Soient f et g dans E_6 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour savoir si $\lambda.f + g \in E_6$, il faut calculer la valeur de cette fonction en 1 :

  $$(\lambda.f + g)(1) = (\lambda.f)(1) + g(1) = \lambda f(1) + g(1) = 0$$

  puisque f et g sont dans E_6 donc $\lambda.f + g \in E_6$.

  Par suite, E_6 n'est pas vide et est stable pour les lois + et ., E_6 est un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Retour à l'exercice ▲

Il faut montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect }(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, c'est-à-dire que tout (x, y, z), vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs α_1, α_2 et α_3.

On cherche donc des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $(x, y, z) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3$.

Or

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 = \lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(0, 0, 1) + \lambda_3(1, -1, -2) = (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 - 2\lambda_3) = (x, y, z)$$

ce qui conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 + \lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 - \lambda_3 & = & y \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & \frac{1}{2}(x + y) \\ \lambda_3 & = & \frac{1}{2}(x - y) \\ \lambda_2 & = & x - y + z \end{array}\right.$$

Le système admet des solutions donc la famille $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.1.4

On part d'une combinaison linéaire nulle des α_i et il faut essayer de montrer que nécessairement tous les scalaires sont nuls.

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 & = & (0,0,0) \\ \iff \quad \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,0,1) + \lambda_3(1,-1,-2) & = & (0,0,0) \\ \iff \quad (\lambda_1+\lambda_3, \lambda_1-\lambda_3, \lambda_2-2\lambda_3) & = & (0,0,0) \end{array}$$

ce qui conduit au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1-\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2-2\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 2\lambda_3 = 0 \end{array} \right.$$

La famille $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.1.5

$K_n[x]$ n'est pas vide puisque la fonction polynôme nulle est de degré $-\infty$ et appartient donc à $K_n[x]$.

De plus, si P et Q sont deux fonctions polynômes de $K_n[x]$ alors pour tout $\lambda \in K$,
deg $(\lambda P + Q) \leq max($deg P,deg $Q) \leq n$ donc $\lambda P + Q \in K_n[x]$.

$K_n[x]$ est donc un s.e.v. de $K[x]$ puisqu'il est non vide et stable pour les lois + et .

Déterminons une base de ce s.e.v. :

Les fonctions polynômes de $K_n[x]$ sont de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Soit donc la famille $\mathcal{B}_n = \{f_i, 0 \leq i \leq n\}$ où pour tout $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ et pour tout $x \in K \quad f_i(x) = x^i$ ave"c la convention que pour tout $x \in K \quad f_0(x) = 1$.

La famille $\mathcal{B}_n$ est génératrice de $K_n[x]$ puisque pour tout $P \in K_n[x]$, il existe $(a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0) \in K^{n+1}$ tels que

$$P = a_n f_n + a_{n-1} f_{n-1} + \cdots + a_2 f_2 + a_1 f_1 + a_0 f_0$$

Reste à montrer que $\mathcal{B}_n$ est libre. Or une fonction polynôme est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls donc

$$\begin{aligned} a_n f_n + a_{n-1} f_{n-1} + \cdots + a_2 f_2 + a_1 f_1 + a_0 f_0 &= O_{K[x]} \\ \iff a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 &= O_{K[x]} \\ \iff a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 &= O \end{aligned}$$

et $\mathcal{B}_n$ est une famille libre.

Par suite, $\mathcal{B}_n$ est une base de $K_n[x]$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.1.6

1. $\mathcal{F}$ contient deux vecteurs et $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, il suffit donc de vérifier que $\mathcal{F}$ est libre.

$$\alpha(2,-3) + \beta(-6,12) = (0,0) \Longleftrightarrow (2\alpha - 6\beta, -3\alpha + 12\beta) = (0,0)$$

   ce qui conduit au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha - 6\beta & = & 0 \\ -3\alpha + 12\beta & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 3\beta \\ 3\beta & = & 0 \end{array}\right.$$

   donc $\alpha = \beta = 0$.

2. Calculer le rang de $\mathcal{G}$ revient à calculer la dimension de $G = \text{Vect}\,\{g_1, g_2, g_3\}$ où $g_1 = (2,-1,3)$, $g_2 = (5,2,-1)$ et $g_3 = (9,0,5)$. Pour cela, il faut trouver une base de G.

   Il est clair que $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$ est une famille génératrice de G donc $\dim G \leq 3$. Pour savoir si c'est une base, il faut regarder si $\mathcal{G}$ est libre ou pas.

$$\begin{array}{rcl} \alpha g_1 + \beta g_2 + \gamma g_3 & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ \Longleftrightarrow \alpha(2,-1,3) + \beta(5,2,-1) + \gamma(9,0,5) & = & (0,0,0) \\ \Longleftrightarrow (2\alpha + 5\beta + 9\gamma, -\alpha + 2\beta, 3\alpha - \beta + 5\gamma) & = & (0,0,0) \end{array}$$

   ce qui conduit au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha + 5\beta + 9\gamma & = & 0 \\ -\alpha + 2\beta & = & 0 \\ 3\alpha - \beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 2\beta \\ 9\beta + 9\gamma & = & 0 \\ 5\beta + 5\gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

   d'où $\beta = -\gamma$ et $\alpha = -2\gamma$.

   La famille $\mathcal{G}$ est donc liée, et si par exemple on prend $\gamma = -1$ on a

$$2g_1 + g_2 - g_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \text{ou} \quad 2g_1 + g_2 = g_3$$

   On en déduit que $G = \text{Vect}\,\{g_1, g_2, g_3\} = \text{Vect}\,\{g_1, g_2\}$. En effet

(a) Vect $\{g_1, g_2, g_3\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ qui contient $\{g_1, g_2\}$ et qui contient donc Vect $\{g_1, g_2\}$ puisque, par définition, Vect $\{g_1, g_2\}$ est le plus petit s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ contenant $\{g_1, g_2\}$. Ainsi Vect $\{g_1, g_2, g_3\} \supset$ Vect $\{g_1, g_2\}$

(b) $g_3 = 2g_1 + g_2$ donc $g_3 \in$ Vect $\{g_1, g_2\}$. Par suite Vect $\{g_1, g_2\}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ qui contient $\{g_1, g_2, g_3\}$ et qui contient donc Vect $\{g_1, g_2, g_3\}$ puisque, par définition, Vect $\{g_1, g_2, g_3\}$ est le plus petit s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ contenant $\{g_1, g_2, g_3\}$. Ainsi Vect $\{g_1, g_2, g_3\} \subset$ Vect $\{g_1, g_2\}$

Par double inclusion, nous avons $G =$ Vect $\{g_1, g_2, g_3\} =$ Vect $\{g_1, g_2\}$ et $\{g_1, g_2\}$ est une famille génératrice de G. Voyons si c'est une famille libre.

$$\alpha g_1 + \beta g_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \alpha(2, -1, 3) + \beta(5, 2, -1) = (0, 0, 0) \iff (2\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta, 3\alpha - \beta) = (0, 0, 0)$$

ce qui conduit au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha + 5\beta & = & 0 \\ -\alpha + 2\beta & = & 0 \\ 3\alpha - \beta & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 2\beta \\ 9\beta & = & 0 \\ 5\beta & = & 0 \end{array}\right.$$

d'où $\alpha = \beta = 0$ donc la famille $\{(2, -1, 3), (5, 2, -1)\}$ est libre.

Par suite $\{(2, -1, 3), (5, 2, -1)\}$ est une base de G donc $\dim G = 2$ et rg $\{(2, -1, 3), (5, 2, -1), (9, 0, 5)\} = 2$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.1

$$ {}^t\Omega + \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = {}^t\left(\Omega + {}^t\Delta\right) $$

On montre de façon plus générale que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_{mn}(K)$, ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.2

$$-5.\Delta = -5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 10 & -5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.3

Si on note ω_{ij}, δ_{ij} et $q_{i,j}$ les coefficients respectifs des matrices Ω, Δ et $Q = \Delta\Omega$ alors

$$\begin{aligned}
q_{11} &= \sum_{k=1}^{2} \delta_{1k}\omega_{k1} = 1 \times 1 + 2 \times 4 = 9 \\
q_{12} &= \sum_{k=1}^{2} \delta_{1k}\omega_{k2} = 1 \times 2 + 2 \times 5 = 12 \\
q_{13} &= \sum_{k=1}^{2} \delta_{1k}\omega_{k3} = 1 \times 3 + 2 \times 6 = 15 \\
q_{21} &= \sum_{k=1}^{2} \delta_{2k}\omega_{k1} = -2 \times 1 + 1 \times 4 = 2 \\
q_{22} &= \sum_{k=1}^{2} \delta_{2k}\omega_{k2} = -2 \times 2 + 1 \times 5 = 1 \\
q_{23} &= \sum_{k=1}^{2} \delta_{2k}\omega_{k3} = -2 \times 3 + 1 \times 6 = 0 \\
q_{31} &= \sum_{k=1}^{2} \delta_{3k}\omega_{k1} = 0 \times 1 + (-1) \times 4 = -4 \\
q_{32} &= \sum_{k=1}^{2} \delta_{3k}\omega_{k2} = 0 \times 2 + (-1) \times 5 = -5 \\
q_{33} &= \sum_{k=1}^{2} \delta_{3k}\omega_{k3} = 0 \times 3 + (-1) \times 6 = -6
\end{aligned}$$

d'où

$$Q = \Delta\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

Ce résultat est à comparer avec le produit $\Omega\Delta$ déjà effectué :

$$P = \Omega\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

On constate que $P \neq Q$ soit que $\Omega\Delta \neq \Delta\Omega$, le produit matriciel n'est pas commutatif (les matrices n'ont même pas la même taille).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.4

$$R = {}^t\Delta\, {}^t\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = {}^t(\Omega\Delta)$$

De même, ${}^t\Omega\, {}^t\Delta = {}^t(\Delta\Omega)$.

On montre de façon plus générale que pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(K)$ on a ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.5

La matrice C est inversible et

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.6

1. $\forall (P,Q) \in (K[x])^2, \forall \lambda \in K,$

$$g_1(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' = \lambda g_1(P) + g_1(Q)$$

d'après les propriétés de la dérivée, donc $g_1 \in L(K[x])$.

De plus il est clair que les fonctions polynômes $P = x+1$ et $Q = x-7$ ont la même dérivée, à savoir 1. On a donc $g_1(P) = g_1(Q)$ avec $P \neq Q$ donc g_1 n'est pas injective.

D'autre part, pour tout $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 \in K[x]$ il existe $Q = \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dfrac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots \dfrac{a_1}{2}x^2 + a_0 x$ tel que $g_1(Q) = Q' = P$ donc g_1 est surjective.

2. Pour tous $v = (x,y)$ et $v' = (x',y')$ dans $\mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g_2(\lambda.v + v') &= g_2((\lambda x + x', \lambda y + y')) \\
&= ((\lambda x + x') + (\lambda y + y'), 2(\lambda x + x'), (\lambda y + y') - 3(\lambda x + x')) \\
&= (\lambda(x+y) + (x'+y'), \lambda(2x) + 2x', \lambda(y-3x) + (y' - 3x')) \\
&= (\lambda(x+y), \lambda(2x), \lambda(y-3x)) + (x'+y', 2x', y'-3x') \\
&= \lambda(x+y, 2x, y-3x) + (x'+y', 2x', y'-3x') \\
&= \lambda.g_2(v) + g_2(v')
\end{aligned}$$

donc $g_2 \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
De plus,

$$g_2(v) = g_2(v') \Longleftrightarrow (x+y, 2x, y-3x) = (x'+y', 2x', y'-3x')$$

ce qui conduit au système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& x'+y' \\ 2x &=& 2x' \\ y-3x &=& y'-3x' \end{array}\right. \Longleftrightarrow x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$

Ainsi, $g_2(v) = g_2(v') \Longrightarrow v = v'$ et g_2 est injective.

Regardons si g_2 est surjective :

Soit $w = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $v = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $g_2(v) = w$.

$$g_2(v) = w \Longleftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (x + y, 2x, y - 3x)$$

ce qui conduit au système

$$\left\{\begin{array}{ccc} x + y & = & \alpha \\ 2x & = & \beta \\ y - 3x & = & \gamma \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{\beta}{2} \\ y & = & \alpha - \frac{\beta}{2} \\ \alpha - 2\beta & = & \gamma \end{array}\right.$$

donc si $\gamma \neq \alpha - 2\beta$ le système n'a pas de solutions.

Cela signifie que si $w = (\alpha, \beta, \gamma)$ avec $\gamma \neq \alpha - 2\beta$, il n'esiste pas de $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $g_2(v) = w$ et g_2 n'est pas surjective.

3. Pour tous $v = (x, y)$ et $v' = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} g_3(\lambda.v + v') & = & g_3((\lambda x + x', \lambda y + y')) \\ & = & ((\lambda x + x') + (\lambda y + y'), 2(\lambda x + x') + 1, (\lambda y + y') - 3(\lambda x + x')) \\ & = & (\lambda(x + y) + (x' + y'), \lambda(2x) + 2x' + 1, \lambda(y - 3x) + (y' - 3x')) \\ & = & (\lambda(x + y), \lambda(2x), \lambda(y - 3x)) + (x' + y', 2x' + 1, y' - 3x') \\ & = & \lambda(x + y, 2x, y - 3x) + (x' + y', 2x' + 1, y' - 3x') \\ & \neq & \lambda.g_3(v) + g_3(v') \ \text{ car } \ g_3(v) = (x + y, 2x + 1, y - 3x) \end{array}$$

donc g_3 n'est pas lináire.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.7

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
$$(x,y,z) \in \text{Ker } h_1 \iff h_1(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^2} \iff (x+y-z, x-z) = (0,0)$$
ce qui conduit au système
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ x-z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$
donc
$$\begin{array}{rcl} \text{Ker } h_1 & = & \{v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \text{ tel que } \ y = 0 \ \text{ et } \ x = z\} \\ & = & \{(x,0,x), \ \ x \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{x(1,0,1), \ \ x \in \mathbb{R}\} \\ & = & \text{Vect } \{(1,0,1)\} \end{array}$$
On voit donc que le vecteur $(1,0,1)$ est générateur de Ker h_1, il n'est pas nul donc $\{(1,0,1)\}$ est une famille libre, c'est une base de Ker h_1. De plus, h_1 n'est pas injective.

On est en dimension finie donc le théorème du rang permet d'écrire :
$$\dim \text{Im } h_1 = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } h_1 = 3 - 1 = 2$$
Ainsi, Im h_1 est un s.e.v. de dimension 2 dans $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, donc nécessairement, Im $h_1 = \mathbb{R}^2$ et h_1 est surjective.

Le rang de h_1 est la dimension de Im h_1 donc rg $h_1 = 2$.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
$$(x,y,z) \in \text{Ker } h_2 \iff h_2(x,y,z) = 0 \iff (x+2y-z, y+z, x+y-z) = (0,0,0)$$
ce qui conduit au système
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ x+y-z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & -y \\ x & = & -3y \\ -3y+y+y & = & 0 \end{array} \right. \iff y = x = z = 0.$$

Par suite Ker $h_2 = \{(0,0,0)\}$ et h_2 est injective.

On est en dimension finie donc le théorème du rang permet d'écrire :

$$\dim \operatorname{Im} h_2 = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} h_2 = 3 - 0 = 3$$

Ainsi, Im h_2 est un s.e.v. de dimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, donc nécessairement, Im $h_2 = \mathbb{R}^3$ et h_2 est surjective donc bijective.

Le rang de h_2 est la dimension de Im h_2 donc rg $h_2 = 3$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.2.8

1. Déterminons la matrice de l'application linéaire :

$$\begin{array}{cccc} h_1 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-z) \end{array}$$

Il faut donc calculer les images par h_1 des vecteurs $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ en fonction des vecteurs $f_1=(1,0)$ et $f_2=(0,1)$.

Nous avons

$$\begin{array}{rcl} h_1(e_1)=h_1(1,0,0) & = & (1,1)=f_1+f_2 \\ h_1(e_2)=h_1(0,1,0) & = & (1,0)=f_1+0f_2 \\ h_1(e_3)=h_1(0,0,1) & = & (-1,-1)=-f_1-f_2 \end{array}$$

d'où

$$C_1 = \text{Mat}\ (h_1,(e_1,e_2,e_3),(f_1,f_2)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h_1(e_1) & h_1(e_2) & h_1(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \end{array}$$

2. Déterminons la matrice de l'application linéaire :

$$\begin{array}{cccc} h_2 : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+2y-z, y+z, x+y-z) \end{array}$$

Il faut donc calculer les images par h_2 des vecteurs $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ en fonction des vecteurs $f_1=(1,0,0), f_2=(0,1,0)$ et $f_3=(0,0,1)$.

Nous avons

$$\begin{array}{rcl} h_2(e_1)=h_2(1,0,0) & = & (1,0,1)=f_1+0f_2+f_3 \\ h_2(e_2)=h_2(0,1,0) & = & (2,1,1)=2f_1+f_2+f_3 \\ h_2(e_3)=h_2(0,0,1) & = & (-1,1,-1)=-f_1+f_2-f_3 \end{array}$$

d'où

$$C_2 = \text{Mat}\ (h_2, (e_1, e_2, e_3), (f_1, f_2, f_3)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h_2(e_1) & h_2(e_2) & h_2(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}$$

Retour à l'exercice ▲

Soit $B' = \text{Mat}\,(\phi, \mathcal{E}')$. D'après la formule du cours on a

$$B' = P^{-1}AP \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$$

puisqu'ici, on garde la même base pour l'espace de départ et d'arrivée.
On a

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il faut donc inverser la matrice P. Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{lcl} e'_1 & = & 2e_1 + e_2 \\ e'_2 & = & 3e_1 + 2e_2 \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 2e'_1 - e'_2 & = & e_1 \\ -3e'_1 + 2e'_2 & = & e_2 \end{array} \right.$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$B' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice de Φ relativement à la base $\mathcal{E}'$ est beaucoup plus simple que la matrice de Φ relativement à la base canonique $\mathcal{E}$. On reviendra sur cet aspect dans la chapitre concernant la réduction d'endomorphismes.

Retour à l'exercice ▲

Nous savons que $\text{rg } B = \dim \text{Vect } \{C_1, C_2, C_3\} = \dim \text{Vect } \{L_1, L_2, L_3\}$ et que $1 \leq \text{rg } B \leq 3$.

On constate que $L_2 + L_3 = -3L_1$ mais que $\{L_1, L_2\}$ est libre donc

$$\text{rg } B = 2$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.1

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}(1)\ \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\ \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}(3)\ \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\
&= 0 \times (-2) - 4 \times 4 + 2 \times (-2) - 5 \times 4 + 3(2 \times 4 - 0 \times 5) \\
&= -16 - 4 - 20 + 24 = -16
\end{aligned}
$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.2

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 15 \end{vmatrix} \\
&= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -7 & -3 \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} \\
&= (-1)(-1)^{1+1}(-1)(-1) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{en factorisant chaque colonne par } (-1) \\
&= (-1)(5 \times 3 - 2 \times 7) = -1
\end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.3.3

1. Pour savoir pour quelles valeurs de λ la matrice A_λ est inversible, il faut chercher pour quelles valeurs de λ, $\det A_\lambda$ n'est pas nul. Calculons ce déterminant en le développant par rapport à la première ligne (parce qu'elle contient 0) :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}(2-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 12 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}4\begin{vmatrix} 3 & -4-\lambda \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)[(-4-\lambda)(5-\lambda)+24] + 4(-6+4+\lambda) \\
&= (2-\lambda)[-20-\lambda+\lambda^2+24-4] \\
&= \lambda(\lambda-1)(2-\lambda)
\end{aligned}$$

Donc A_λ est inversible si et seulement si $\lambda \notin \{0,1,2\}$.

2. Regardons donc quand le déterminant de B_λ s'annule :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \text{en remplaçant } C_1 \text{ par } C_1+C_2+C_3 \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \text{en mettant en facteur } (1-\lambda) \text{ dans } C_1 \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} \text{en retranchant } L_1 \text{ aux lignes 2 et 3} \\
&= (1-\lambda)(-2-\lambda)^2 \text{puisque la matrice est triangulaire supérieure}
\end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.4.1

1. Pour S_1 :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} [2]x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ -4x & - & 2y & + & 3z & - & 4t & = & -1 \\ 2x & + & y & + & 2z & & & = & 4 \\ -2x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ & & & & [1]z & - & 2t & = & 1 \\ & & & & 3z & - & t & = & 3 \\ & & & & z & - & t & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ & & & & z & - & 2t & = & 1 \\ & & & & & & 5t & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Les solutions sont donc $t = 0, z = 1, x = 1 - \dfrac{y}{2}$ d'où

$$\mathcal{S}_1 = \{(1 - \frac{y}{2}, y, 1, 0), y \in \mathbb{R}\}.$$

2. Pour S_2 :

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} [1]x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 3z & = & -1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & y & - & 2z & = & -3 \\ & - & 3y & + & 3z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & y & - & 2z & = & -3 \\ & & & & 9z & = & 9 \\ & & & + & 8z & = & 8 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ & - & y & - & 2z & = & -3 \\ & & & & 9z & = & 9 \\ & & & + & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Les solutions sont donc $z = 1, y = 1, x = 1$ d'où

$$\mathcal{S}_2 = \{(1,1,1)\}.$$

3. Pour S_3 :

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3 \\ 2x & - & 3y & = & -1 \\ x & - & y & = & 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3 \\ & - & 7y & = & -7 \\ & - & 3y & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 3 \\ & - & 7y & = & -7 \\ & & 0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Ce système n'a pas de solutions.

Retour à l'exercice ▲

On cherche donc les réels λ tels qu'il existe des $v \neq 0_E$ et $f(v) = \lambda.v$. D'après le raisonnement fait précedemment, λ est valeur propre de f si et seulement si la matrice $B - \lambda I_3$ n'est pas inversible.

D'après les calculs faits dans l'exercice B.3.3,

$$\det (B - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(-2 - \lambda)^2$$

Les valeurs propres sont donc 1 et -2.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice B.5.2

Notons f l'endomorphisme de E dont la matrice est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id}_E)(v) = 0 \Leftrightarrow (B - \lambda I_3)v = 0,$$

d'où

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (-1-\lambda)x + y + z & = & 0 \\ x + (-1-\lambda)y + z & = & 0 \\ x + y + (-1-\lambda)z & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Pour $\lambda = 1$ on doit résoudre

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y + z & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \\ x + y + -2z & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 2x - y \\ x & = & y \\ x + x + -2x & = & 0 \end{array} \right.$$

   Donc $E_1 = \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\ \{(1, 1, 1)\}$.

2. Pour $\lambda = -2$ on doit résoudre

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \\ x + y + z & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow z = -x - y$$

   Donc $E_2 = \{(x, y, -x-y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\ \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$.

Retour à l'exercice ▲

1. Etude de la matrice B.
   Au cours de l'exercice B.5.1, nous avons calculé le polymôme caractéristique de l'endomorphisme associé à la matrice B.

   Nous avons $P_B(x) = (1-x)(x+2)^2$ donc P_B est scindé dans $\mathbb{R}$, 1 est valeur propre simple et -2 est valeur propre double.
   Dans ces conditions, $\det B = 1 \times (-2) \times (-2) = 4$ et on vérifie que $1-2-2 = -3 = -1-1-1 = Tr(B)$.
2. Etude de la matrice H.
   Par définition,
   $$P_H(x) = \det\,(H - xI_3) = \begin{vmatrix} -4-x & 0 & -2 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 5 & 1 & 3-x \end{vmatrix}$$
   En développant le déterminant par rapport à la 2ème ligne, on obtient
   $$\begin{aligned} P_H(x) = (1-x)\begin{vmatrix} -4-x & -2 \\ 5 & 3-x \end{vmatrix} &= (1-x)[(-4-x)(3-x)+10] \\ &= (1-x)(-12+4x-3x+x^2+10) = (1-x)(x^2+x-2) = -(1-x)^2(2+x) \end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice B.5.4

Il faut calculer pour chacune des trois matrices, le polynôme caractéristique, les valeurs propres ainsi que leur multiplicité et comparer la dimension des espaces propres avec la multiplicité des valeurs propres. On conclut ensuite avec le théorème $V.6$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice B.5.4

Voici la solution pour B :

Nous avons $P_B(x) = -(x-1)(x+2)^2$ (cf exercice B.5.1) dont les racines sont 1 et -2. Le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$. Pour savoir si g est diagonalisable, il faut vérifier si la dimension des espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres.

1. 1 est une valeur propre simple donc $\dim E_1 = 1$
   Remarque : dans l'exercice B.5.2, nous avons même montré que
   $$E_1 = \text{Vect }\{(1,1,1)\} = \text{Vect }\{w_1\}.$$
2. -2 est valeur propre double, donc il faut vérifier que $\dim E_{-2} = 2$. Or, toujours dans l'exercice B.5.2, nous avons montré que $E_{-2} = \text{Vect }\{(1,0,-1),(0,1,-1)\} = \text{Vect }\{w_2, w_3\}$ et $\dim E_{-2} = 2$

Par suite, g est diagonalisable et il existe une base de vecteurs propres.

D'autre part,
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

La famille $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ est donc ne famille libre de trois vecteurs dans un espace de dimension 3 donc $\mathcal{W}$ est une base de E et
$$B' = \text{Mat }(g, \mathcal{W}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

De plus, par la formule du changement de base,
$$B' = Q^{-1}BQ \quad \text{avec} \quad Q = P_{\mathcal{E}\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Voici la solution pour H :

Dans l'exercice B.5.3 nous avons calculé le polynôme caractéristique de h et avons trouvé :

$$P_h(x) = -(1-x)^2(2+x)$$

dont les racines sont 1 et -2.

Le polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$. Pour savoir si h est diagonalisable, il faut savoir si la dimension des espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres.

1. -2 est une valeur propre simple donc $\dim E_{-2} = 1$

2. 1 est valeur propre double, donc il faut regarder si $\dim E_1 = 2$.

$$h(v) = v \Longleftrightarrow (H - I_3)v = 0_E \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -5x - 2z & = & 0 \\ 5x + y + 2z & = & 0 \end{array} \right. 0 \Longleftrightarrow y = 0 \text{ et } z = -\frac{5}{2}x$$

et $E_1 = \{(x, 0, -\frac{5}{2}x), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\ \{(2, 0, -5)\}$ donc $\dim E_1 = 1 < 2 = m_{-2}$ (puisque le vecteur $(2, 0, -5)$ n'est pas nul) et h n'est pas diagonalisable.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Exercice B.5.4

Voici la solution pour K :

Calculons le polynôme caractéristique de k :

$$P_k(x) = \det\,(K - xI_2) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

La fonction polynôme P_k n'est pas scindée sur $\mathbb{R}$ donc k n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Cependant, si on suppose que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$, alors la fonction polynôme P_k est scindée sur $\mathbb{C}$. De plus, elle n'a que des racines simples (i et $-i$) donc l'endomorphisme associé est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Retour à l'exercice ▲