

LES RISQUES ET LES VOLATILITES

Contrairement aux techniques d'observation des trends d'évolution (tendance et puissance de la leçon consacrée à l'analyse technique), l'objectif est ici de mesurer l'importance des perturbations qui se définissent autour d'un mouvement général.

Cette mesure concerne en tout premier lieu, l'étude des instruments financiers optionnels. Ils sont en effet construits pour se protéger contre l'incertitude de l'évolution des prix et leur valorisation est directement fonction de l'intensité de ces variations erratiques.

Cette mesure concerne aussi l'analyse des risques de marché pour lesquels l'expérience du passé est une source d'information quantifiable et, aujourd'hui, couramment utilisée.

Après avoir défini et appris à mesurer la volatilité historique (chapitre A), on introduira les processus stochastiques (chapitre B) qui sont la formalisation mathématique des hypothèses de marches au hasard des cours boursiers. La troisième partie (chapitre C) est une présentation de la *Value-at-Risk* (VaR), méthode aujourd'hui répandue de l'analyse du risque de marché.

A) LA VOLATILITE HISTORIQUE

L'indicateur de volatilité est l'outil de mesure fondamental relatif aux risques de marché. Son observation dans le passé du cours, la volatilité historique, conduit à l'évaluation d'un écart-type, estimateur d'une dispersion, classique en statistique.

1) L'insuffisance de l'écart-type du cours

L'outil le plus connu pour mesurer une dispersion est l'écart type (ou son carré, la variance).

On peut alors imaginer mesurer directement le degré de perturbation des marchés, sur une période de n observations, par l'estimation de la variance du cours :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_{t-k+1} - M_t)^2$$

(M_t est la moyenne des n dernières valeurs observées)

Mais cette mesure a l'inconvénient majeur évident de ne pas éliminer l'influence du trend. Une croissance régulière du cours doit correspondre à une volatilité nulle, alors que la variance du cours est bien, dans ce cas, différente de zéro.

2) L'écart-type du rendement

L'idée la plus naturelle est alors de substituer à la série brute X_t , sa variation $X_{t+1} - X_t$ (son écart-type sera nul pour un trend linéaire) et, mieux encore, sa variation relative :

$$\frac{X_{t+1} - X_t}{X_t}$$

Celle-ci est insensible, en particulier, aux choix d'unités.

On retrouve ici la mesure d'un rendement, exprimé en taux d'accroissement et on préfère souvent lui substituer la mesure (proche) d'un rendement continu :

$$r_t = \ln\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)$$

La volatilité d'une période élémentaire (en général quotidienne) est alors l'écart-type de cette valeur r_t .

En appelant μ_t la moyenne des n dernières valeurs de r_t , la variance est obtenue par :

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (r_{t-k+1} - \mu_t)^2$$

NB : La série observée des r_t étant considérée comme un échantillon de rendements aléatoires, dont on recherche la variance, on applique la règle de calcul, classique en statistique, qui distingue la variance mesurée sur l'échantillon de celle de la population dont il est extrait, légèrement plus forte. Un coefficient $n/(n-1)$ permet de passer d'une mesure à l'autre et l'on substitue ainsi, comme dans la formule ci-dessus, le diviseur $(n-1)$, au nombre n des observations.

On corrige enfin cette volatilité élémentaire en l'annualisant, c'est à dire en la multipliant par le nombre D de périodes élémentaires dans l'année. Cela revient à mesurer la dispersion d'un rendement annuel, égal à D fois le rendement mesuré sur une période. Si les observations sont, par exemple, les cours de clôture quotidiens, le nombre moyen de jours ouvrés dans l'année étant de 252, il convient de multiplier la variance par $D = 252$. La volatilité annuelle est alors :

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{D}{n-1} \sum_{k=1}^n (r_{t-k+1} - \mu_t)^2}$$

Le tableau 1 résume les étapes pratiques du calcul d'une volatilité historique.

Tableau 1 : Calcul d'une volatilité historique

Etapes successives	Commentaires
1. Construction de la série des X_t	Choix de la grandeur mesurée (prix ou taux) Choix de la période (de quelques jours à plusieurs années) Choix de la périodicité (en général quotidienne, mais quelquefois inférieure à la journée)
2. Calcul des rendements	Taux d'accroissement $(X_{t+1} - X_t) / X_t$, ou Rendement continu $\ln(X_{t+1} / X_t)$ (préférable)
3. Calcul de l'écart-type	Corriger le "biais" $(n-1)/n$ de l'échantillon, dans le calcul de la variance
4. Calcul de la volatilité annualisée	Multiplier l'écart-type par la racine carrée du nombre D de périodes élémentaires dans une année et exprimer le résultat en pourcentage ($\times 100$)

3) La volatilité pondérée

La longueur de la période de calcul de la volatilité historique, c'est à dire le nombre n d'observations retenues dans le calcul est arbitraire. On peut à la fois observer une volatilité longue de 90 jours et une volatilité courte de 5 jours. On cherche ainsi, fréquemment, à tenir compte de la tendance profonde du marché, tout en accordant aux observations récentes une importance privilégiée.

Cette idée conduit à la définition empirique d'une volatilité pondérée, pour laquelle interviennent, au niveau du calcul de la variance, des coefficients a_k de poids décroissants avec l'ancienneté de l'observation (par exemple une pondération géométrique a^k avec $0 < a < 1$).

$$\frac{1}{n-1} \frac{\sum_{k=1}^n a^{k-1} (r_{t-k+1} - \mu_t)}{\sum_{k=1}^n a^{k-1}}$$

L'annualisation s'effectue comme précédemment (cf. les calculs et les commentaires du cas 10.6. Volatilité historique lissée).

4) La volatilité "plus haut-plus bas" de Parkinson

Les informations plus riches que constituent les valeurs "plus haut" H_k et "plus bas" L_k des cours pendant chaque séance, permettent de calculer un indicateur, mis au point par Parkinson (1980) et dont l'expression est :

$$\sigma_t = \frac{0,627}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{H_{t-k+1}}{L_{t-k+1}}$$

L'annualisation pose le problème de la longueur exacte de la durée de chacune des séances, inférieure généralement à la journée. On propose alors de choisir comme coefficient multiplicateur de la variance non pas 252, mais $252(24/N_h)$, où N_h est le nombre d'heures quotidiennement ouvertes.

De telles estimations empiriques sont nombreuses chez les professionnels des marchés et, dans la mesure où le seul critère effectif est l'efficacité à mesurer (et quelquefois à prévoir) les risques de marché, elles restent souvent confidentielles.

B) LES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Les processus stochastiques (ou aléatoires) sont des descriptions théoriques de séries temporelles dans lesquelles chaque valeur observée est assimilée au tirage d'une variable aléatoire. Une série passée de cours, ou de rendements, permet alors de caractériser les paramètres d'un modèle descriptif abstrait, modèle qui, par la suite, permet d'interpréter la série, en tendance ou en volatilité. Ces modèles conduisent à résoudre les problèmes d'évaluation et de prévision liés aux risques de marché et sont également à la base de l'analyse des instruments dérivés.

1) Les processus en temps discret

Les processus stochastiques sont des fonctions du temps aléatoires. On ne présente ici que les processus où le temps est traité de manière discrète (suite de nombres), a priori adaptés au mode d'observation des séries temporelles. Un processus stochastique en temps discret est donc une suite de variables aléatoires réelles X_t où t est un entier. La loi d'un tel processus est théoriquement définie par les lois de tous les sous-ensembles de variables :

$$\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$$

pour tous les sous-ensembles de dates :

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$$

mais en pratique on utilise surtout des processus définis à partir des espérances de chacune des variables :

$$\mu(t) = E(X_t)$$

et des covariances :

$$\Gamma(t,h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$$

(on note $\sigma^2(t)$ la variance de X_t , c'est-à-dire $\Gamma(t,0)$.)

Dans l'ensemble de tels processus une place particulière est faite aux processus dits stationnaires (et du second ordre) pour lesquels, schématiquement, tendance et volatilité sont constantes et tout phénomène cyclique absent.

2) Les processus stationnaires

Mathématiquement un processus stationnaire, du second ordre, est tel que :

- $E(X_t)$ ne dépend pas de t , soit $\mu(t) = \mu$
- $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$ ne dépend pas de t , soit $\Gamma(t,h) = \Gamma(h)$

Et donc en particulier,

$$\Gamma(t,0) = \sigma^2(t) = \sigma^2$$

$$\Gamma(t,-h) = \Gamma(-h) = \Gamma(h)$$

Pour de tels processus il est facile d'estimer les paramètres μ , σ et $\Gamma(h)$ à partir d'une observation donnée.

L'espérance μ est directement obtenue par la moyenne des observations X_1, X_2, \dots, X_t :

$$m = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t X_k$$

La covariance (quelquefois appelée autocovariance) est obtenue par l'estimateur :

$$C_h = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{t-h} (X_k - m)(X_{k+h} - m)$$

La variance étant bien sûr:

$$s^2 = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t (X_k - m)^2 = C_0$$

3) La fonction d'auto-corrélation et le corrélogramme

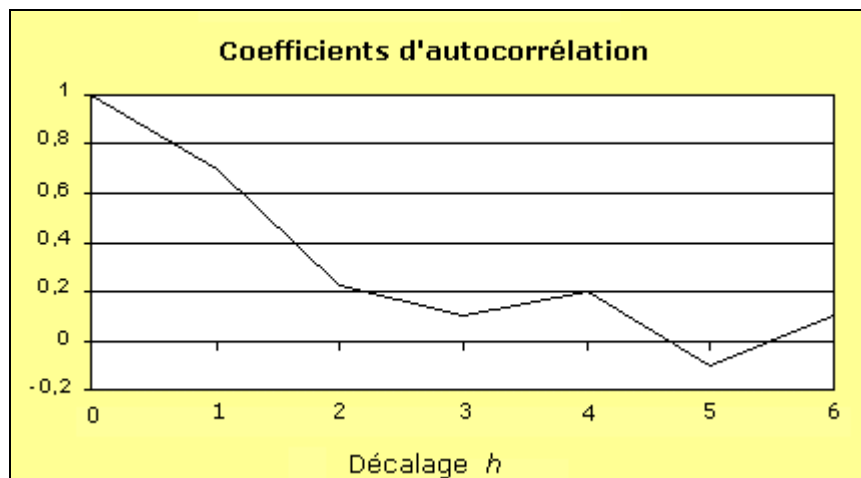
La fonction d'auto-corrélation se déduit de l'auto-covariance :

$$r_h = \frac{\sum_{k=1}^{t-h} (X_k - m)(X_{k+h} - m)}{\sum_{k=1}^t (X_k - m)^2}$$

C'est le rapport entre l'auto-covariance et la variance.

Le corrélogramme est la représentation graphique des valeurs du coefficient d'auto-corrélation pour les différentes valeurs de h . Un corrélogramme

"classique" est celui où, à partir de la valeur $r_0=1$, les valeurs successives de r_h diminuent très rapidement avec h (courbe ci-dessous).



Des séries non stationnaires ont des corrélogrammes caractéristiques. S'il existe par exemple une tendance (positive ou négative), les valeurs de r_h ne décroîtront vers 0 que très lentement. Des séries alternées ou cycliques ont des corrélogrammes également alternés ou cycliques.

4) Les bruits blancs et la marche au hasard

Les bruits blancs sont des processus stationnaires particuliers, qui représentent des suites de variables aléatoires ε_t , de moyenne nulle et de variance constante pour toutes les valeurs de t et d'autocovariance nulle pour toutes les valeurs de t et de h (c'est-à-dire mutuellement indépendantes) :

$$E(\varepsilon_t) = \mu = 0$$

$$\sigma^2(t) = \sigma^2$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+h}) = \Gamma(h) = 0$$

Un processus X_t est qualifié de marche au hasard si $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ où ε_t est un bruit blanc.

On peut aussi écrire :

$$X = \sum_{k=1}^t \varepsilon_k$$

si bien que l'espérance d'une marche au hasard est égale à 0 et sa variance à $t\sigma^2$ (le processus n'est pas stationnaire).

Ce processus est d'une grande importance dans la modélisation des mouvements des cours de sous-jacents d'options. Dans ce cas, X_t représente, en général, le logarithme népérien du prix d'un actif, $\ln(P_t)$, le rendement continu sur chaque période r_t étant alors assimilé à un bruit blanc.

Si $P_t = P_{t-1} e^{r_t}$ on a bien :

$$\ln(P_t) = \ln(P_{t-1}) + r_t$$

Un trend de croissance μ peut aussi être introduit. On a, dans ce cas,

$P_t = P_{t-1} e^{\mu+rt}$ et le processus devient :

$$\ln(P_t) = \ln(P_{t-1}) + \mu + r_t$$

C) INTRODUCTION A LA VALUE-AT-RISK

1) Le principe

Une méthodologie cohérente d'analyse du risque de marché a été proposée par J.P. Morgan (RiskMetrics 1994), avec l'objectif d'établir une norme de mesure permettant les comparaisons et le contrôle.

Les outils de base utilisés sont les plus classiques :

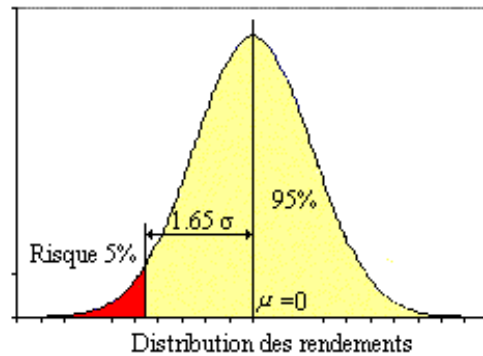
- des volatilités historiques, pour apprécier les risques de variation des rendements de certains actifs de référence ;
- des sensibilités, pour quantifier l'impact de ces variations sur la valeur du portefeuille analysé.

S'ajoutent, lorsque le portefeuille est soumis à des risques multiples et afin d'intégrer l'impact des dépendances entre ces risques, l'observation des covariances entre les rendements de référence.

L'originalité de la méthode préconisée est de ne pas se limiter à une mesure du risque en terme d'écart-type ("la volatilité a augmenté de 2 %"), ou en terme de variation relatives ("la sensibilité est de 4,2" ou "le delta est 0,3"), mais de produire une mesure absolue d'une perte potentielle, avec une probabilité fixée et pour un horizon donné. Ainsi, avec les valeurs classiques (préconisées) d'un risque de 5 % et d'un horizon de 1 mois, une VaR de 2,5 millions d'euros signifie qu'il y a une probabilité de 95 % que la perte potentielle, sur le portefeuille analysé, soit inférieure à 2,5 millions d'euros. Inversement bien sûr, il y a 5 % de chances que cette perte soit supérieure à cette valeur qui apparaît ainsi comme un seuil de risque, suffisamment peu probable mais non négligeable (5 % correspond à 1 observation sur 20), pour pouvoir être apprécié et géré.

2) La méthode

La première étape de la méthode consiste à interpréter les distributions statistiques des rendements quotidiens.



Si l'on fait l'hypothèse simplificatrice d'une distribution conforme à une loi normale centrée (de moyenne $\mu = 0$), et d'écart-type σ (non annualisé), l'écart de $\pm 1,65\sigma$ indique le seuil correspondant à un risque de 5 %. Selon la position du portefeuille vis à vis de cette variation, le risque de perte est situé, soit à la baisse (position longue), soit à la hausse du rendement (position courte), mais la symétrie de la distribution conduit au même niveau absolu de ce seuil.

Si l'horizon de l'analyse est supérieur à 1 journée, par exemple, 1 mois (approché à 25 jours ouvrés), il suffit de multiplier l'écart-type par 5 pour adapter le calcul du seuil.

La deuxième étape est alors de mesurer l'impact réel, sur la valeur du portefeuille, de la variation du rendement à ce niveau de risque. Il convient généralement de calculer le prix qui résulte de la variation du rendement en l'appliquant au nominal du portefeuille.

La Value-at-Risk est la différence (perte) entre la valeur initiale V_0 du portefeuille, dont l'espérance à l'horizon est supposée identique ($\mu = 0$), et la valeur V_1 ainsi calculé dans le cadre du scénario défavorable :

$$\text{VaR} = V_0 - V_1$$

Dans le cas simple d'un portefeuille composé d'un seul actif de volatilité σ (adaptée à l'horizon T étudié) :

$$\begin{aligned} \text{VaR} &= V_0 e^{\mu T} - V_0 e^{\mu T - 1,65\sigma} \\ \text{VaR} &= V_0 (1 - e^{-1,65\sigma}) \end{aligned}$$

Et, après approximation :

$$\text{VaR} = 1,65\sigma V_0$$

3) Un exemple

En adaptant un exemple de "RiskMetrics Technical Document" de J.P.Morgan, imaginons un investisseur américain détenant une position longue de 114 millions d'euros, sur la base d'un cours EUR/USD de 1,14, soit 100 millions de dollars. Si la volatilité quotidienne de EUR/USD est de 0,565 %, on calcule la VaR pour l'horizon d'une journée :

$$\text{VaR} = 1,65 \times 0,565 \% \times 100 = \text{USD } 932\,000$$

Dans 95% des cas l'investisseur ne perdra pas plus de \$ 932 000 d'un jour sur l'autre.

Dans le cas d'un portefeuille soumis à deux risques simultanés, l'introduction de la covariance entre les rendements est nécessaire au calcul du risque global. Si l'on note :

VaR_1 la première Value-at-Risk ;

VaR_2 la deuxième Value-at-Risk ;

ρ_{12} la covariance entre les deux rendements ;

On démontre que :

$$VaR = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{12}VaR_1VaR_2}$$

Si, dans l'exemple précédent, l'investisseur détient, non pas des simples devises, mais des obligations libellées en euros, dont la volatilité quotidienne est de 0,605 %, le risque est à la fois celui d'une variation des taux euro et celui d'une variation du cours de change. On trouve :

$$VaR1 = USD 100 \times 1,65 \times 0,605 \% = USD 0,999 M$$

$$VaR2 = USD 100 \times 1,65 \times 0,565 \% = USD 0,932 M$$

$$VaR = \sqrt{(0,999)^2 + (0,932)^2 + 2 \times (-0,27) \times 0,999 \times 0,932} = USD 1,168 M$$

Parmi les nombreuses questions soulevées par la méthode de la Value-at-Risk, on peut noter les principales :

- stabilité, dans le temps, des variances et covariances historiques ;
- ses distributions réelles des rendements ne suivent pas la loi normale, mais présentent des déformations (asymétries, concentration plus forte autour de la moyenne, "queues" plus épaisses) ;
- quelle durée utiliser pour le calcul des volatilités et covariances historique ? J.P.Morgan propose des volatilités lissées exponentiellement (Cf. le cas pratique sur la volatilité historique lissée) ;
- Comment traiter le cas des dépendances non linéaires, en particulier celles des actifs conditionnels ?

La lecture des publications disponibles sur le site Internet de J.P. Morgan fournit une partie des réponses et constitue une intéressante source de documentation sur le sujet.