L'EVALUATION DES OPTIONS

On distingue deux types de modèles :

- Ceux où le temps est discontinu (partagé en sous périodes discrètes) principalement les modèles d'arbres :

  On prendra pour exemple le modèle de Cox, Ross et Rubinstein [1979]

- Ceux où la variable temps est continue et prend toutes valeurs possibles de la période :

  Il s'agit principalement du modèle de Black et Scholes

A) LE MODELE DE COX, ROSS ET RUBINSTEIN

1) Le modèle d'arbre à une période

i) *Les hypothèses*

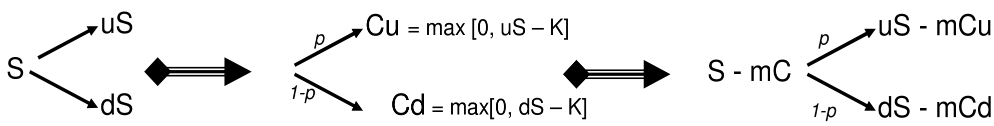
- Les marchés sont parfaits et l'information efficiente
- Quand le prix de l'action augmente c'est d'un coefficient **u** avec u > r > 1 (r = 1 + rf)

  [On évite ainsi la domination du taux sans risque]

- Quand le prix de l'action baisse c'est du coefficient d avec d < r (et donc u > r > d)

  [Pour éviter la domination absolue de l'actif risqué qui interdirait tout arbitrage]

ii) *On a donc :*



Avec K le prix d'exercice, S le prix du sous-jacent, C celui du call, m le nombre de call par action sous-jacente, p la probabilité pour que S augmente

Le portefeuille est sans risque si les deux valeurs possibles sont égales. On appelle *m le hedge ratio*.

$u.S - m.Cu = d.S - m.Cd$ et donc $m = S.\dfrac{u-d}{Cu - Cd}$

Exemple :
S = 100
K = 105
p = 0,5
r = 1,08
u = 1,2
u =0,9

$Cu = \max[0;\ 1{,}2 \times 100 - 105] = 15$

$Cd = \max[0;\ 0{,}9 \times 100 - 105] = 0$

$m = 100\dfrac{1{,}2 - 0{,}9}{15 - 0} = 2$

On vérifie que les valeurs de fin de jeu sont donc :

$u.S - m.Cu = 120 - 2 \times 15 = 90$

$d.S - mCd = 90 - 2 \times 0 = 90$

Comme le portefeuille est sans risque la valeur de fin de jeu est la valeur de départ multipliée par le taux r

$$r.(S - m.C) = u.S - m.Cu \Rightarrow C = \frac{S.(r-u) + m.Cu}{r.m}$$

En remplaçant $m = S\dfrac{u-d}{Cu-Cd}$ et après transformation :

$$C = \frac{1}{r} \cdot \left(Cu \cdot \frac{r-u}{u-d} + Cd \cdot \frac{u-r}{u-d} \right)$$

Avec l'exemple : $C = \dfrac{1}{1{,}08}\left(15\dfrac{1{,}08 - 0{,}9}{1{,}2 - 0{,}9} + 0\dfrac{1{,}2 - 1{,}08}{1{,}2 - 0{,}9}\right) = 8{,}33$

Le portefeuille initial vaut : $S\text{-}m.C = 100 - 2 \times 8{,}33 = 83{,}33$

L'accroissement de sa valeur est bien : $\dfrac{\text{valeur de fin de jeu}}{\text{portefeuille initial}} = \dfrac{90}{83{,}33} = 1{,}08 = r$

Le portefeuille initial a bien gagné le taux sans risque

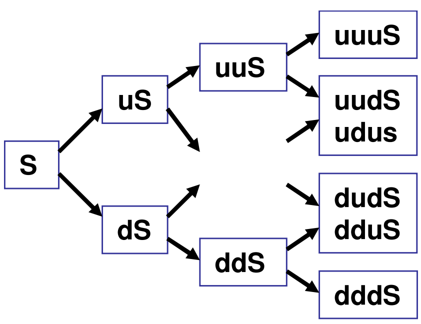
On appelle $j = \dfrac{r-d}{u-d}$ alors $C = \dfrac{j \cdot Cu + (1-j) \cdot Cd}{r}$

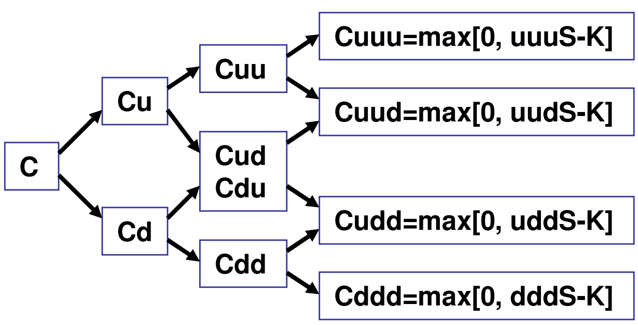
j, position de r entre u et d, fonctionne comme une probabilité de risque neutre entre les valeur possibles du call :

- Plus r s'approche de u, plus C est proche de Cu
- Plus r s'approche de d : plus C est proche de Cd

2) Modèle d'arbre à plusieurs période (ici 3 périodes)

i) *La représentation*





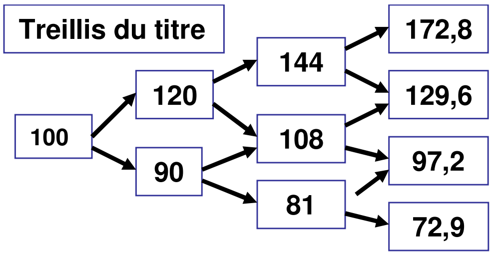
A chaque période :

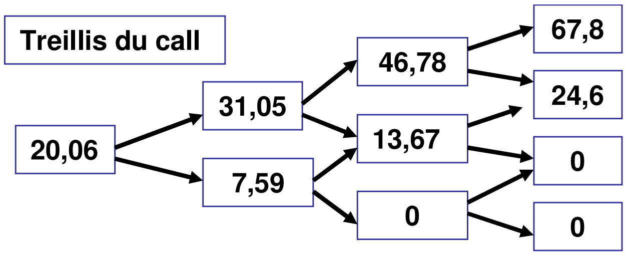
$Cuu = \dfrac{j \cdot Cuuu + (1-j) \cdot Cuud}{r}$; $Cud = \dfrac{j \cdot Cudu + (1-j) \cdot Cudd}{r}$; $Cdd = \dfrac{j \cdot Cddu + (1-j) \cdot Cddd}{r}$

$Cu = \dfrac{j \cdot Cuu + (1-j) \cdot Cud}{r}$; $Cd = \dfrac{j \cdot Cdu + (1-j) \cdot Cdd}{r}$

$C = \dfrac{j \cdot Cu + (1-j) \cdot Cd}{r}$; rappel : $j = \dfrac{r-d}{u-d}$

ii) *Exemple de modèle d'arbre à trois période*





On calcule : $j = \dfrac{1{,}08 - 0{,}9}{1{,}2 - 0{,}9} = 0{,}6$ et $m = 100 \dfrac{1{,}2 - 0{,}9}{31{,}05 - 7{,}59} = 1{,}28$

$S - m \cdot C = 100 - 1{,}28 \cdot 20{,}06 = 74{,}32$

Valeur du jeu en période 1 : $120\text{-}1{,}28 \cdot 31{,}05 = 80{,}26$ ou encore $90 - 1{,}28 \cdot 7{,}59 = 80{,}28$

$\dfrac{80{,}26}{74{,}32} = 1{,}08$ On retrouve le taux sans risque

En période 1, si l'action est à 120, on souscrit C à 31,05

$m_u = 120 \dfrac{1{,}2 - 0{,}9}{46{,}78 - 13{,}67} = 1{,}087$

$S - mC$ s'écrit alors : $u \cdot S - m_u \cdot Cu = 120 - 1{,}087 \times 31{,}05 = 86{,}24$

Valeur du jeu en période 2 : $144 - 1{,}087 \times 46{,}78$ ou encore $108 - 1{,}087 \times 13{,}67 = 93{,}14$

On vérifie que : $\dfrac{93{,}15}{86{,}24} = 1{,}08 = r$

Le treillis donnant la valeur des calls situe le marché sur un profil d'équilibre indifférent par rapport au taux du marché (taux sans risque)

B) LA METHODE DE BLACK ET SCHOLES (1973)

Rappel : la loi normale N(E, σ) s'applique à des phénomènes aléatoires (browniens) dont les variables ne sont pas liées entre elles. Exemple : les taux de variation quotidiens des cours.

La loi logonormale s'applique aux phénomènes aléatoires dont les valeurs successives sont liées entre elles. Exemple : le cours d'une action au cours d'une journée.

$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ est alors distribué selon une loi normale $N\left(\mu_t, \sigma\sqrt{t}\right)$

$E\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right] = \mu t = \bar{x}$ est la moyenne et $\sigma\sqrt{t}$ est l'écart type de $N\left(\mu t, \sigma\sqrt{t}\right)$

Mathématiq uement les cours $\frac{S_t}{S_0}$ sont distribués selon $e^{N\left(\mu t, \sigma\sqrt{t}\right)}$

1) Combien vaut une option (un call par exemple) à son échéance ?

- Si elle est OTM ou ATM elle ne vaut rien.
- Si elle est In the Monnaie (ITM) sa valeur est positive mais de combien ?

i) *Cela renvoie à trois questions :*

- Quelle probabilité a le call d'être dans la monnaie à l'échéance ?
- Quel est le rendement d'un placement équivalent sur le marché sans risque dans le même temps ?
- Quelle est la valeur moyenne du sous-jacent dans la zone où le call est profitable ?

ii) *Probabilité que le call soit ITM*

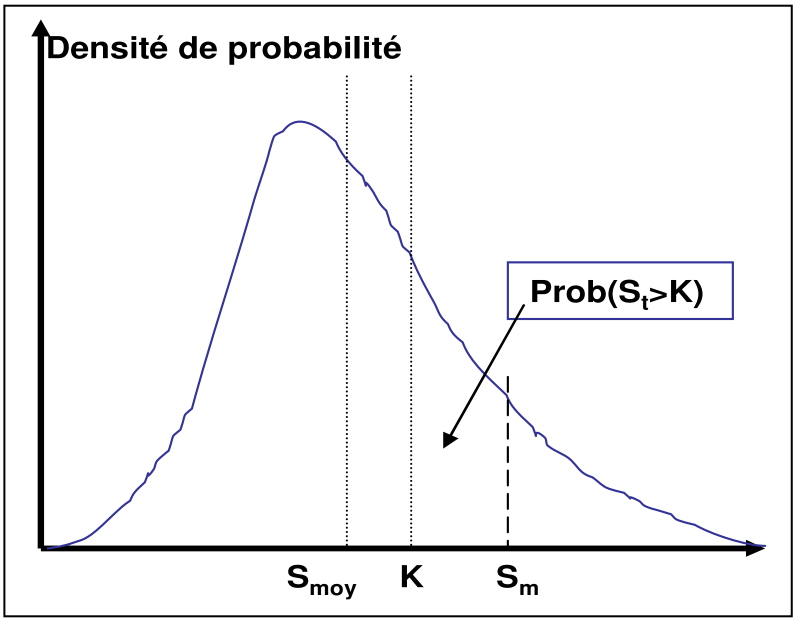
$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ suit une loi normale $N\left(\mu t, \sigma\sqrt{t}\right)$

Avec μ le taux de rentabilité annuel et σ l'écart type de la rentabilité.

$$\mu t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

La probabilité que S_t soit supérieur au prix d'exercice K s'écrit :

$$P(S_t > K) = P\left(\ln\frac{S_t}{S_0} > \ln\frac{K}{S_0}\right) = 1 - P\left(\ln\frac{S_t}{S_0} < \ln\frac{K}{S_0}\right)$$



iii) *Comment fonctionne en fait la méthode de Black et Scholes ?*

La probabilité que le call termine dans la monnaie est la même que celle de St > K (par exemple 0,4 pour K=120)

Le sous jacent peut alors prendre toutes les valeurs supérieures à K. Laquelle prendre ?

- La moyenne de ces valeurs est Sm qui divise l'aire au-delà de K en deux parts égales (par exemple 135)
- C'est cette valeur moyenne qui détermine l'espérance de paiement si l'option est exercée.

L'espérance de valeur du call est : 0,4*(135-120)

- Par le call on a acheté une incertitude alternative à la certitude du taux sans risque (exemple 4%)

  $C = 0,4*(135 - 120)/1,04 = 5,77$

  Ou plus précisément : $C = 0,4 * e^{-0,04} * (135 - 120) = 5,76$

2) Exemple : call européen sur action sans dividende

i) *Le modèle*

Notations :
- S : prix spot du sous-jacent
- K : prix d'exercice
- T : maturité en années
- σ : volatilité
- r : Taux d'intérêt continu corrigé du risque
- i : taux de rendement continu du sous-jacent
- C : prix du call européen

$N(x)$ est la fonction de répartitio n de la loi normale centrée réduite.

$N'(x)$ est sa densité : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

On remarque : $\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{e^{-\frac{d_2^2}{2}}} = e^{\frac{(d_1+d_2)(d_2-d_1)}{2}} = e^{\frac{-1}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\cdot\ln\frac{S}{K\cdot e^{-rT}}\cdot\sigma\cdot\sqrt{T}} = \frac{K}{S} \cdot e^{-rT}$

Et donc $S \cdot N'(d_1) = K \cdot e^{-rT} \cdot N'(d_2)$

Le call européen sur action sans dividende est : $C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$

Avec : $d_1 = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \cdot \ln \frac{S}{K \cdot e^{-rT}} + \frac{1}{2}\sigma \cdot \sqrt{T}$ et $d_2 = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \ln \frac{S}{K \cdot e^{-rT}} - \frac{1}{2}\sigma \cdot \sqrt{T}$

Delta : $\Delta = \frac{\delta C}{\delta S} = N(d_1)$

Gamma : $\Gamma = \frac{\delta^2 C}{\delta S^2} = \frac{N'(d_1)}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}}$

Thêta : $\Theta = \frac{\delta C}{\delta T} = \frac{S\sigma}{2\sqrt{T}} \cdot N'(d_1) + K \cdot r \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$

Vega : $\Upsilon = \frac{\delta C}{\delta \sigma} = S \cdot \sqrt{T} \cdot N'(d_1)$

Rhô : $\mathrm{P} = \frac{\delta C}{\delta r} = T \cdot K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$

ii) *Call européen sur action sans dividende : application*

Notations :
- S=120 prix spot du sous-jacent
- K=100, prix d'exercice
- T=1 maturité en années
- σ=0,4 la volatilité
- r=12% Taux d'intérêt continu corrigé du risque
- i=0 taux de rendement continu du sous-jacent
- C : prix du call européen

Le call européen sur action sans dividende est : $C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$

On peut écrire aussi :

$d_1 = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \cdot \left[\ln \frac{S}{K} + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T \right]$ et $d_2 = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \cdot \left[\ln \frac{S}{K} + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot T \right]$

Soit $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Avec les valeurs :

$d_1 = \frac{1}{0{,}4 \times 1} \left[LN \frac{120}{100} + 0{,}12 + \frac{1}{2} 0{,}16 \right] = 0{,}96$ soit $N(d_1) = 0{,}8215$

$d_2 = \frac{1}{0{,}4 \times 1} \left[LN \frac{120}{100} + 0{,}12 - \frac{1}{2} 0{,}16 \right] = 0{,}56$ soit $N(d_2) = 0{,}7123$

$C = 120 \times 0{,}8215 - 100 \times e^{-0{,}12 \times 1} \times 0{,}712 = 98{,}58 - 63{,}09 = 35{,}49$