Marchés financiers
Théorie financière

Titres et portefeuilles

1. Des titres aux portefeuilles

Le risque avec un seul titre

L'analyse quantitative de la valeur d'un titre prend appui sur deux indicateurs de performance (le prix, le revenu) et de risque (la variance de cet indicateur ou son écart-type.

Supposons un titre T qui peut prendre des valeurs (cours) $p_1, .. p_i .., p_n$, respectivement avec les probabilités $a_1, .. a_i .., a_n$.

La valeur moyenne du prix s'écrit :

$$\bar{p}_T = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot p_i)$$

La valeur espérée du prix s'écrit :

$$E(p_T) = \sum_{i=1}^{n} [a_i \cdot E(p_i)]$$

L'indicateur de risque s'écrit par la variance :

$$\sigma_T^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \times (p_i - \bar{p}_A)^2$$

Ou encore par l'écart type :

$$\sigma_T = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (p_i - \bar{p}_T)^2}$$

L'appréciation relative du risque peut se faire par le coefficient de variation V_T :

$$V_T = \frac{\sigma_T}{\bar{p}_T}$$

1. Des titres aux portefeuilles

Gain et risque avec *deux titres*

Soit un portefeuille P comportant deux titres T=(A, B) en quantités respectives a et b, p_P, p_A et p_B leurs prix respectifs et R_P, R_A et R_B les revenus qu'ils engendrent respectivement.

Le prix du portefeuille est :

$$p_P = a \cdot p_A + b \cdot p_B$$

Prix moyen du portefeuille :

$$\overline{p}_P = a \cdot \overline{p}_A + b \cdot \overline{p}_B$$

Prix espéré du portefeuille :

$$E(p_P) = a \cdot E(p_A) + b \cdot E(p_B)$$

Variance du prix du portefeuille :

$$\sigma_{p_P}^2 = a^2 \cdot \sigma_{pA}^2 + b^2 \cdot \sigma_{p_B}^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sigma_{p_A p_B}$$

Avec la covariance des prix de A et B :

$$\sigma_{p_A p_B}$$

Coefficient de variation du prix :

$$V_{p_P} = \frac{\overline{p}_P}{\sigma_{p_P}} = \frac{a \cdot \overline{p}_A + b \cdot \overline{p}_B}{\sqrt{a^2 \sigma_{pA}^2 + b^2 \sigma_{pB}^2 + 2ab\sigma_{p_A} \cdot \sigma_{pB} \cdot \rho_{p_A pB}}}$$

1. Des titres aux portefeuilles

Evolution relative de deux titres

Soit un portefeuille P de deux titres A et B dont les performances pour une variable (prix ou revenu) sont affectées d'un risque représentées par :

- **Les variances** $\sigma_A{}^2 \quad \sigma_B{}^2 \quad \sigma_P{}^2$
- **La covariance de A et B** σ_{AB}
- **La corrélation de A et B** ρ_{AB} avec $-1 \leq \rho_{AB} \leq +1$

On a écrit précédemment $\sigma_P^2 = a^2\sigma_A^2 + b^2\sigma_B^2 + 2ab\sigma_A \times \sigma_B \times \rho_{AB}$

<u>1°) A et B ont des évolutions complètement indépendantes l'une de l'autre, soit :</u> $\rho_{AB} = 0$

$\sigma_P^2 = a^2\sigma_A^2 + b^2\sigma_B^2$ **La variance du portefeuille est la somme pondérée des variances des titres**

<u>2°) A et B ont des évolutions parfaitement corrélées positivement, soit :</u> $\rho_{AB} = 1$

$\sigma_P^2 = (a\sigma_A + b\sigma_B)^2$ **La variance est le carré de la somme des écarts types pondérée**

<u>3°) A et B ont des évolutions parfaitement corrélées négativement, soit :</u> $\rho_{AB} = -1$

$\sigma_P^2 = (a\sigma_A - b\sigma_B)^2$ **La variance est le carré de la différence des écarts types pondérés**

On a au départ : $\sigma_P{}^2(/\rho_{AB} = -1) \leq \sigma_P{}^2(/\rho_{AB} = 0) \leq \sigma_P{}^2(/\rho_{AB} = 1)$

Plus les performances de A et B sont coordonnées et de même signe, plus le risque de portefeuille s'accroît. Plus elles sont coordonnées et de signe contraire, plus le risque de portefeuille diminue. Cette observation est à la base de la gestion de portefeuille.

1. Des titres aux portefeuilles

Généralisation à n titres

Soit un portefeuille P comportant des titres A1… Ai… An en quantités a1… ai… an. Pour une variable donnée, par exemple ici le revenu,
On appelle E(Ri) le revenu espéré du titre Ai et E(Rp) le revenu espéré du portefeuille :

$$E(R_P)=\sum_{i=1}^{n} a_i E(R_i)$$

$$\sigma_P^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \sigma_{ij}$$

dans lequel *σij=cov(Ri, Rj).*   Et :

$$\sigma_P=\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \sigma_{ij}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Avec ρ_{ij} le coefficient de corrélation entre Ri et Rj , variance et écart type s'écrivent :

$$\sigma_P^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$$

et

$$\sigma_P=\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j\right]^{\frac{1}{2}}$$

2. Titres, portefeuilles et marché : le Bêta

Rentabilité du titre et du marché

On appelle R_M la rentabilité du marché et $E(R_M)$ son espérance mathématique.
On désigne par p_i les n probabilités des rentabilités R_i des titres i

$$E(R_M) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot R_i$$

On appelle β_A le paramètre qui mesure le risque que le marché M fait peser sur le titre A :

$$\beta_A = \frac{\sigma_{MA}}{\sigma_M^2}$$ avec

- σ_M la variance de M
- σ_{MA} la covariance de M et de A

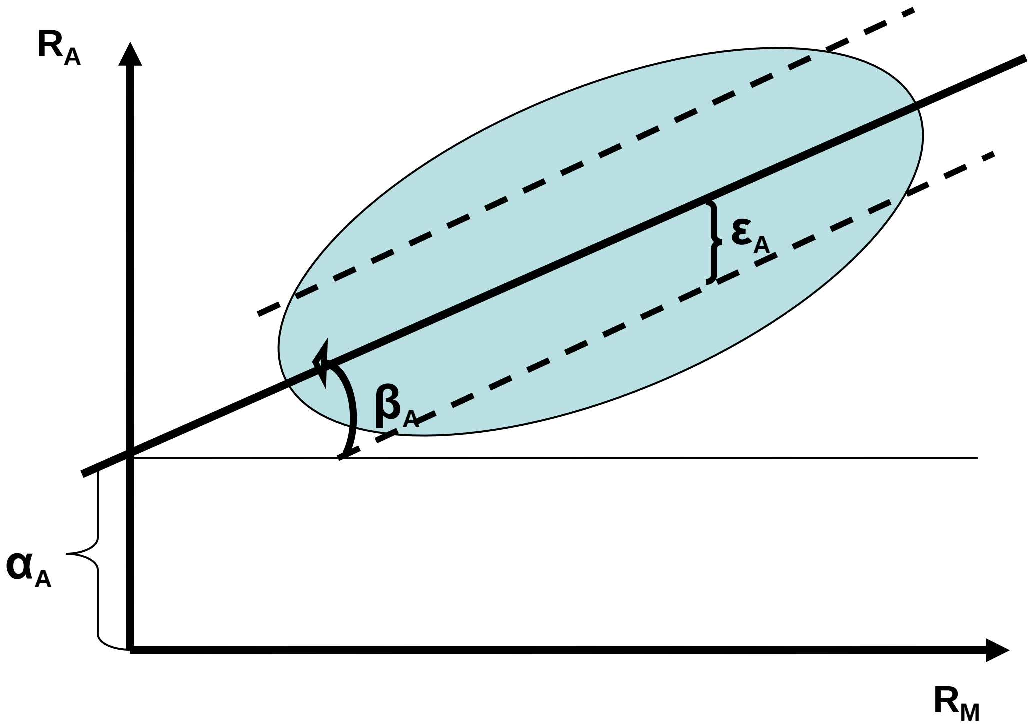
Selon la valeur de la rentabilité du titre est plus ou moins sensible au marché :			
$\beta_A > 0$	La rentabilité du marché entraîne la rentabilité du titre dans le même sens	$\beta_A > 2$	Titre A hypersensible au marché
		$2 > \beta_A > 1$	Titre A sensible au marché
		$1 > \beta_A > 0$	Titre A peu sensible au marché
$\beta_A = 0$	La rentabilité du titre est insensible aux variations de rentabilité du marché		
$\beta_A < 0$	La rentabilité du titre évolue à l'inverse du celle du marché	$0 > \beta_A < -1$	Titre A peu sensible au marché
		$-1 > \beta_A > -2$	Titre A sensible au marché
		$\beta_A < -2$	Titre A hypersensible au marché

2. Titres, portefeuilles et marché : le Bêta

Portefeuille à un seul type d'actions

Soit un nuage de points représentant les valeurs observées de R_A pour les différentes valeurs prises par R_M. La droite de régression de en fonction de est de la forme :

$$R_A = \alpha_A + \beta_A R_M + \varepsilon_A$$



Dans cette relation :

- La constante α_A représente la rentabilité du titre, indépendamment de celle qu'apporte le marché.

- Le coefficient **βA** établit le niveau de rentabilité qu'apporte la performance du marché.

- Le résidu **εA** représente la volatilité du titre au-delà de ce qu'apportent les deux autres paramètres. On désigne par **σεA** la variance de ce résidu.

2. Titres, portefeuilles et marché : le Bêta

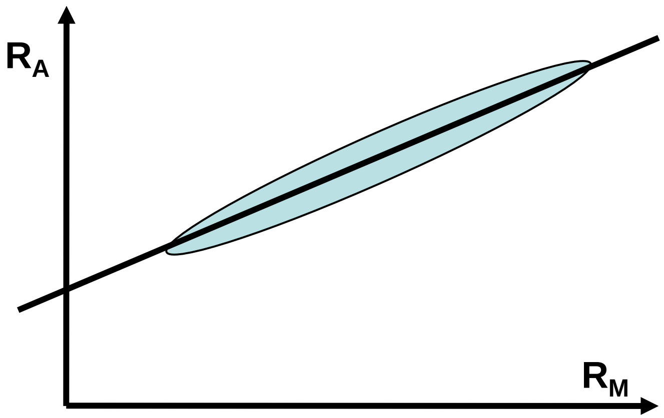
Corrélation et risque

Le carré du coefficient de corrélation du titre au marché ρ_{MA}^2 mesure la distance entre les points du nuage et la droite de régression. Le risque affectant le titre peut être décomposé en deux parts :

- Le risque de marché égal à **βA2.σM2**
- Le risque propre à l'action **σεA2**

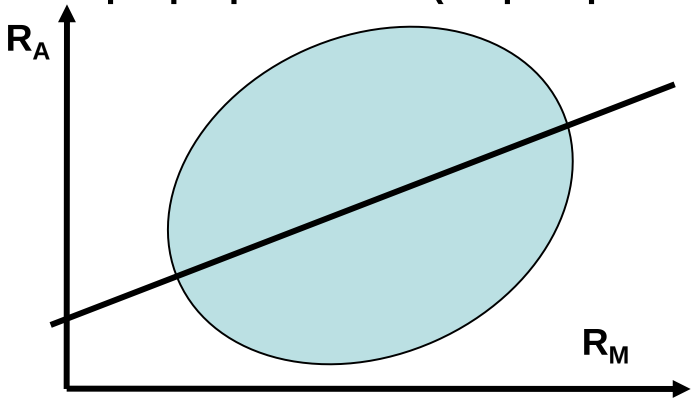
$\text{Si } \rho_{MA}^2 \to 1$ **les points du nuage sont sur la droite de régression ou en sont proches**

$\text{Alors } \sigma_{\varepsilon A} \to 0$ **Le risque sur le titre est le risque systématique du marché.**



$\text{Si } \rho_{MA}^2 \to 0$ **les points du nuage sont très dispersés autour de la droite de régression**

Le risque systématique tend vers 0 puisque les rentabilités sont peu corrélées. Il ne reste que le risque propre au titre (risque spécifique)



2. Titres, portefeuilles et marché : le Bêta

Diversification et modèle de marché

Considérons à présent un portefeuille est constitué de plusieurs types de titres différents i=1..n. Le risque du portefeuille dépend désormais de trois séries de facteurs :	
Le risque du marché	Chaque titre i est lié au marché par un coefficient **βi**
Le risque spécifique	Chaque titre i est affecté par un coefficient **σεi**
Le risque de portefeuille proprement dit	Les covariances compensent plus ou moins les risques

Soit des actions $A_1 \ldots A_i \ldots A_n$ de rendements unitaires $R_1 \ldots R_i \ldots R_n$ et figurant en quantités $a_1 = .. a_i \ldots = a_n = a = 1/n$ dans un portefeuille P de rendement R_P. Soit β_i associé à i et β_P celui du portefeuille.

On écrit alors : $$\beta_P = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \beta_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

Le risque du portefeuille s'écrit : $$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon P}^2 = \frac{\sigma_M^2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \beta_i + \sigma_{\varepsilon P}^2$$

Avec le risque spécifique moyen d'un titre : $$\overline{\sigma}_{\varepsilon i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{\varepsilon i}}{n}$$

On écrit le risque spécifique de P : $$\sigma_{\varepsilon P}{}^2 = \overline{\sigma}_{\varepsilon i}^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{\varepsilon i} = \frac{\overline{\sigma_{\varepsilon i}{}^2}}{n}$$

Alors quand $n \to \infty : \sigma_{\varepsilon P}{}^2 \to 0$

> Conclusion : les risques spécifiques liés aux titres tendent à se compenser et sous certaines hypothèses à s'annuler quand la diversification du portefeuille s'accroît. Seules les sensibilités des titres au marché (représentées par leurs coefficients) font varier le risque du portefeuille.