THEORIE FINANCIERE

ET EVALUATION DES TITRES

A) DE LA MARCHE AU HASARD A L'EFFICIENCE DES MARCHES

1) La construction progressive de l'hypothèse

i) *Concept d'efficience en économie*

Les économistes utilisent le terme d'efficience dans des sens variés.[1]

L'allocation efficiente de la théorie néoclassique

Le terme d'efficience est un anglicisme qui désigne la propriété d'un organisme de faire ce pour quoi il a été mis en place.

L'efficience des économistes néoclassiques est dite allocative ou allocationnelle :

Elle indique une allocation des ressources disponibles entre les emplois alternatifs telle qu'il n'existe aucune autre allocation qui puisse permettre d'obtenir un résultat meilleur. Une telle efficience suppose les agents capables d'attitudes et d'anticipations rationnelles. Les anticipations formées sur les éléments futurs sont les mêmes que si elles étaient formées sur des données avérées. Cela signifie qu'il n'y a pas de distinction entre la valeur fondamentale d'un bien (sa « vraie » valeur) et son prix d'équilibre sur un marché parfait.

L'efficience informationnelle :

C'est celle qui permet un ajustement instantané et complet à toute information nouvelle de telle sorte que l'organisme produise un équilibre tel qu'aucun autre ne peut à ce moment être dit meilleur que lui. Les informations nouvelles interviennent alors de façon aléatoire.

L'efficience opérationnelle :

Elle tient au système de transactions, ce que nous avons appelé la microstructure des marchés. Elle désigne une situation où aucun acteur

[1] Cf. sur ce point Cobbault R.[1997], Théorie financière, Paris : Economica, pp.289-303.

du marché ne bénéficie d'une position privilégiée – institutionnelle ou informationnelle – lui permettant de s'extraire de la concurrence pour bénéficier d'une rente de situation.

L'observation de la réalité et la théorie néoclassique

Ces principes sont souvent malmenés par la réalité des marchés. La théorie financière vise à les réintégrer mais n'y parvient que partiellement. Par exemple :

- ✓ *La spéculation* est au cœur des marchés et notamment des marchés financiers comme résultat d'un calcul sur les décalages de prix qui peuvent s'établir dans le temps. Elle n'éloigne pas de l'efficience du marché si où elle repose sur un calcul rationnel d'anticipation compatible avec l'efficience informationnelle et l'efficience opérationnelle du marché.
- ✓ *Les bulles rationnelles* résultent d'enchaînements spéculatifs qui accentuent l'écart entre valeur fondamentale et prix observé. Cette situation peut subvenir alors même que les acteurs ont identifié l'écart et son creusement et peuvent craindre un retournement de tendance. La théorie néoclassique est impuissante à intégrer ce phénomène.

La rationalité mimétique des théories non-standards

Elle s'appuie sur une autre partie de la théorie économique qui réfute l'idée d'une espèce de rationalité forte, presque absolue, des acteurs. En fait ceux-ci raisonnent les situations avec une information incomplète qu'ils ne peuvent que partiellement traiter dans le temps imparti pour décider. Ils ont donc recours à toutes sortes de références leur permettant de pallier l'incertitude qui en résulte quant à l'efficience.

Les bulles décrites ci-dessus suivent alors *une logique autoréférentielle*. La hausse du prix d'un titre constitue un signe et engendre un comportement d'achat lui-même cause de la hausse du prix. Comme une *prophétie auto-réalisatrice*.

ii) *L'émergence du concept d'efficience des marchés financiers*

Une définition

On doit à E.F. Fama [1965][2] la première définition de l'efficience des marchés financiers :

Un marché financier est dit efficient si et seulement si l'ensemble de l'information concernant chaque actif financier coté sur ce marché est immédiatement intégré au prix de cet actif.

Cette définition de Fama entraîne quatre conséquences :

[2] Fama E.F.[1965], "The Behavior of Stock Market Prices", *The Journal of Business*, January, pp. 34-105.

- ✓ L'efficience concerne le marché des actifs financiers mais aussi tous les marchés avec lesquels il est en interrelations : marchés de produits, marchés monétaires et des changes, obligataires, marchés de produits dérivés.
- ✓ Pour qu'il y ait efficience l'information doit atteindre simultanément tous les agents concernés.
- ✓ Si la correction des prix est instantanée, aucun agent ne peut tirer un profit dont les autres ne bénéficient pas.
- ✓ Sur un marché efficient aucun actif n'est surévalué ni sous-évalué.

Efficience et marchés parfaits

Cette définition suppose en fait que les marchés financiers sont des marchés purs et parfaits au sens de la théorie néoclassique. Pour les marchés financiers, cela signifie que :

- ✓ Les agents économiques sont rationnels : ils agissent de façon cohérente au regard des informations dont ils disposent ; ils cherchent à maximiser leur gain pour un risque donné (ou minimiser le risque pour un gain donné).
- ✓ L'information est libre, diffusée instantanément à tous les agents qui la traitent en temps réel.
- ✓ L'information est gratuite.
- ✓ Les coûts de transaction sont nuls : taxes sur les opérations et commissions d'intermédiation.
- ✓ Les investisseurs sont nombreux et aucun ne détient la possibilité de peser sur le marché (hypothèse d'atomicité). Ils n'agissent sur le marché que s'ils savent celui-ci liquide (existence d'une contrepartie à leurs ordres d'achat ou de vente).

Si ces conditions sont réalisées le prix et la valeur fondamentale tendent à être identiques. Mais le seul énoncé de ces hypothèses montre la vanité de cette première définition des marchés efficients.

Une nouvelle définition

On la doit à M.C. Jensen [1978][3].

Un marché est efficient si les prix reflètent l'information au point que le gain marginal d'une action sur l'information (le profit qui peut en être obtenu) ne peut excéder le coût marginal qui en résulte.

Sont alors réputés efficients les marchés sur lesquels les prix des actifs cotés intègrent les informations les concernant, de sorte qu'aucun

[3] Jensen M.C.[1978], "Some anomalous evidences regarding market efficiency", Journal of Financial Economics, n°6, pp.95-101.

investisseur ne peut en tirer un profit supérieur aux coûts de transaction engendrés par l'acte. C'est un retour au principe premier de l'efficience : toutes les informations, diffusées à tous les agents, ont produit instantanément un prix qui en exploite toutes les possibilités.

2) Les trois niveaux de l'efficience

Fama avait dès 1970 proposé un enrichissement de sa première définition en distinguant trois formes de l'efficience : une forme faible, semi-forte et forte[4]. La distinction lui offrait un fil conducteur pour classer les études empiriques sur le sujet. Elle constitue depuis une typologie inévitable dans l'analyse des marchés financiers et de leur efficience. E.F. Fama l'a reformulée vingt ans plus tard pour intégrer les apports nouveaux et notamment la définition de Jensen[5].

i) *La forme faible de l'efficience*

Définition

Un marché est efficient sous la forme faible quand il n'est pas possible de tirer parti des INFORMATIONS PASSEES concernant un actif financier pour prévoir l'évolution future du prix de cet actif et en tirer un profit.

Cela signifie que le prix actuel d'un titre incorpore les conséquences à tirer de toutes les informations passées : historique des cours, résultats, dividendes, croissance du chiffre d'affaires, environnement macroéconomique et des marchés, réactions du prix du titre face à ces évolutions, etc. Ces informations ne peuvent plus produire une évolution du prix du titre. Si un acteur du marché réalise une autre prévision sur cette base, celle-ci revêt une forte incertitude et à toute opération menée sur cette base est associé un risque élevé.

Signification

Si l'hypothèse est vérifiée, elle est réputée remettre en cause la gestion de titres à partir des outils de l'analyse fondamentale et de l'analyse technique. Qu'en est-il en fait ?

- ✓ *L'analyse fondamentale* consiste à prévoir l'évolution de la valeur d'un titre à partir d'informations économiques, comptables et financières propres aux sociétés concernées ou à leur environnement. Cette dernière peut se fonder sur différentes méthodes : sur l'évaluation comptable (somme de la valeur des actifs et du *goodwill*) ou sur la somme actualisée des flux futurs de revenus pour l'essentiel.

  Cette approche n'est pas contradictoire avec l'hypothèse de forme faible de l'efficience : l'analyse fondamentale améliore l'usage de l'information disponible mais n'engendre pas de possibilités d'arbitrage contraire à l'hypothèse. Elle renforce au contraire l'efficience des marchés.

[4] Fama E.F.[1970], "Efficient Capital Markets : a Review of Theory and empirical Work", *Journal of Finance*, May, pp.383-417.
[5] Fama E.F.[1991], "Efficient Capital Market II", *Journal of Finance*, December.

- ✓ *L'analyse technique* est au contraire *a priori* contradictoire avec l'hypothèse d'efficience (faible) des marchés financiers.
- ✓ Dès l'origine C. Dow posait que si l'information des marchés était intégralement incorporée aux cours, il précisait que cette information était celle collectivement détenue par les acteurs. Individuellement ces derniers sont inégaux : quand elle se diffuse à tous l'information ne le fait que progressivement. Elle n'est donc ni instantanée, ni gratuite, ni égale, ni traitée en temps réel.
- ✓ L'idée que des méthodes graphiques et statistiques fondées sur les seuls cours passés permettent de réaliser des gains réfute, en elle-même, l'hypothèse d'efficience.

Validité de l'hypothèse

Les vérifications empiriques de l'hypothèse faible de l'efficience des marchés sont en fait celles de l'efficacité des méthodes de spéculation fondées sur l'analyse fondamentale et surtout l'analyse technique. Elles consistent à établir si l'emploi de ces méthodes donne de meilleurs résultats que la gestion passive d'un portefeuille : si oui l'hypothèse d'efficience est invalidée, sinon elle est validée.

P. Gillet établit un bilan de ces tests et en donne la synthèse suivante :[6]

« Les résultats des tests les plus simples semblent valider la forme faible des marchés financiers. Les tests les plus robustes paraissent au contraire remettre quelque peu en cause la forme faible de l'efficience. Cependant la sophistication de ces tests fait surgir des problèmes méthodologiques qui rendent leurs conclusions fragiles. »

L'avis général s'inscrit dans cette ligne pour considérer l'hypothèse d'efficience faible comme valide. Mais cette validation n'est pas indiscutable.

ii) *La forme semi forte de l'efficience*

Définition

Un marché est efficient sous la forme semi-forte quand il n'est pas possible de tirer parti des INFORMATIONS RENDUES PUBLIQUES concernant un actif financier pour prévoir l'évolution future du prix de cet actif et en tirer un profit.

L'information prise en compte est ici toute celle qui est dévoilée : l'information sur les cours et l'information nouvelle rendue publique à un moment donné. Le marché est efficient dans la forme semi-forte s'il réagit immédiatement et complètement à une information nouvelle concernant un titre, plusieurs titres ou l'ensemble du marché.

---

[6] Gillet Ph.[1999], *op. cit.*, p.61.

Les informations nouvelles peuvent être : une décision d'un gouvernement ou d'une banque centrale, des indications macroéconomiques, la conjoncture d'un marché, les résultats d'une entreprise agissant sur son propre titre ou sur le marché si elle est considérée comme un test, l'annonce d'une opération sur le capital d'une société, etc.

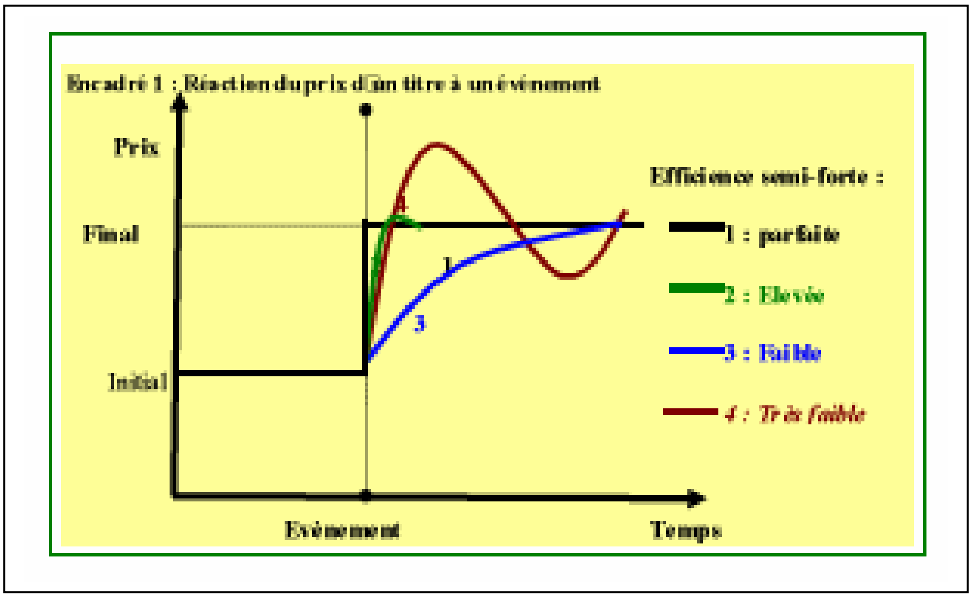
Si l'efficience du marché est semi forte, le prix du titre ou des titres concernés s'ajuste instantanément et ne laisse aucune place à des possibilités d'arbitrage.

Signification

Les conséquences de cette réaction complète et instantanée sont :

- ✓ La valeur fondamentale et le prix du titre sont identiques.
- ✓ Les gains spéculatifs ou plus simplement d'arbitrage sont inexistants.
- ✓ Les anticipations d'évènements futurs sont des informations que le prix du titre incorpore sous la forme d'opinions « moyennes » des acteurs du marché.
- ✓ Tout événement non anticipé qui survient a un impact sur les cours. Cet impact peut être repéré.

L'efficience semi forte signifie la capacité de réaction à une information nouvelle liée à un événement non anticipé, comme le figure le graphique de l'encadré 1.



Validité de l'hypothèse

C'est sur cette base de la rapidité de l'adoption du nouveau cours d'équilibre quand surviennent une information ou un événement nouveaux que se fait le test de la forme semi-forte de l'efficience. La méthode est donc celle des études d'évènements.

Reprenons la conclusion de P. Gillet de l'étude de ces tests empiriques.[7]

« Les études d'évènements ont été extrêmement nombreuses, en particulier dans la mesure où l'étude de la réaction des marchés à un événement permet une conclusion indirecte sur la forme semi forte de l'efficience. Divisions d'actions, annonces de résultats et de distributions de dividendes, OPA ou OPE, négociations de blocs d'actions constituent les principales familles d'évènements étudiés par les chercheurs. On peut citer également … la mise en examen des dirigeants d'entreprises ou les comportements des marchés lorsqu'ils découvrent l'existence d'un risque environnemental dans l'exploitation d'une firme.

« L'ensemble des études effectuées établissent que les titres s'ajustent à la nouvelle information suffisamment rapidement pour qu'aucun investisseur ne soit en mesure d'en tirer parti. En revanche l'ajustement, s'il est bref, est rarement immédiat. Ce temps d'ajustement peut être expliqué par le fait que les investisseurs ne sont pas tous informés en même temps tandis que leur prise de décision est rarement instantanée. On peut donc accepter la forme semi forte de la théorie de l'efficience des marchés au sens de Jensen [1978]. En revanche il est plus difficile d'accepter cette hypothèse si on retient la définition originelle de l'efficience de Fama [1965].

« La validation de la forme semi forte de l'efficience n'est cependant pas totale. Il existe en effet certains cas pour lesquels les marchés ne sont pas efficients.»

iii) *La forme forte de l'efficience*

Définition

Un marché est efficient sous la forme faible quand il n'est pas possible de tirer parti des INFORMATIONS NON PUBLIQUES concernant un actif financier pour prévoir l'évolution future du prix de cet actif et en tirer un profit.

Cette forme est la plus difficile à admettre car elle se heurte à la raison et au bon sens. Elle signifie que des d'informations confidentielles susceptibles d'affecter le prix d'un ou plusieurs actifs ne permettent pas à ceux qui les détiennent en privé de réaliser des gains sur les marchés. Les informations peuvent concerner particulièrement des sociétés cotées ou être des informations générales. Elles portent sur les mêmes sujets que pour la forme semi forte.

Signification

[7] *Op. cit.* p.96

La question en cause ici est le délit d'initié. La situation d'initié – c'est-à-dire de détenteur d'une information privée qui affectera les cours dès lors qu'elle sera rendue publique – rompt l'égalité entre les acteurs du marché et biaise la formation des prix. Si elle est perçue par les investisseurs, elle crée chez ceux-ci le sentiment d'un risque supplémentaire d'une rémunération réduite. En conséquence elle peut les éloigner des marchés d'actions et réduire la liquidité de ceux-ci. C'est pourquoi la loi et les autorités de marché essaient de réprimer les pratiques d'initiés en en faisant un délit.

La possibilité qu'ont les initiés de tirer profit de leur information privée est en outre réduite dans deux situations :

- ✓ *Celle où les non-initiés les observent et adoptent des comportements mimétiques*.
- ✓ *Celle où les informations privées sont créées de façon récurrente avant de devenir publiques*. Ainsi en est-il des résultats diffusés périodiquement par les entreprises, les organismes statistiques des gouvernements ou ceux d'agences de prévision ou de notation. Les acteurs du marché attendent ces informations à date fixe et peuvent donc en anticiper le contenu. Ils surveillent aussi étroitement les initiés et suivent les signaux qu'ils donnent, réduisant ainsi l'utilisation qui peut être faite de l'information privée.

Validité de l'hypothèse

La vérification empirique de cette forme forte de l'efficience est difficile :

- ✓ Les initiés sont difficiles à identifier : les dirigeants d'entreprises et leurs collaborateurs sont soupçonnables, mais aussi les administrateurs, les commissaires aux comptes, les conseils, les banquiers et tous les intermédiaires engagés dans la préparation d'une opération … plus tous ceux auprès de qui ils se confient.
- ✓ La chronologie de l'acquisition de l'information privée et de son exploitation jusqu'à ce qu'elle devienne publique est quasiment impossible à établir.
- ✓ Les opérations délictueuses sont souvent difficiles à repérer car les initiés délinquants les dissimulent derrière toutes sortes d'intermédiaires, de prête-noms de sociétés écrans étrangères, etc.

Les études de validation de la forme forte de l'hypothèse d'efficience des marchés sont partielles et indirectes. On en retiendra deux types :

- ✓ *Les études consacrées aux délits d'initié*. Elles tentent d'établir si l'opérateur a réalisé un gain anormal et dans quel temps il a rendu publique l'information.

  Certaines de ces études font apparaître un gain d'initié ce qui invalide la forme forte de l'efficience. Mais la réaction des marchés, informés par les opérations d'initiés, est établie par la plupart de ces études : soit pour établir l'existence de gains liés à des opérations d'arbitrage (les marchés ne sont pas efficients), soit pour montrer que les marchés réagissent par mimétisme (ils sont donc efficients car les initiés informent ainsi rapidement le marché).

- ✓ *Les études sur les performances des portefeuilles gérés par des professionnels*. Ces derniers sont supposés en moyenne mieux informés que les non professionnels : plus complètement et surtout plus tôt. Leurs performances devraient être de ce fait supérieures. Si ce n'est pas le cas c'est que l'information privée devient très vite publique et que les marchés sont efficients au sens fort.

  Les résultats des analyses sont peut probants. En moyenne les gérants de portefeuille (d'OPCVM) ne font pas mieux que le marché pour la double raison : d'une part que leur gestion est calquée sur le marché, comme on le verra par ailleurs ; et que d'autre part cette même gestion fait le marché quand les spécialistes y réalisent une part dominante des transactions.

  Prenons une nouvelle fois la synthèse de Ph. Gillet :[8]

  « Ces tests demeurent cependant peu probants : s'ils convergent vers une validation de la forme forte, ils ne suffisent pas à l'imposer réellement. Leur champ de validation est trop étroit pour qu'ils valident totalement une théorie qui reste, pour longtemps encore, à l'état d'hypothèse.

  « La confrontation de la théorie et des faits est à l'avantage de ces derniers. Il est difficile de nier que la détention d'informations privilégiées ne permette pas aux investisseurs de s'enrichir. Les scandales financiers qui font périodiquement la une de l'actualité procèdent de cette croyance intuitive, selon laquelle l'information se transforme aisément en gain et que l'égalité de traitement des actionnaires nécessite l'adoption d'un règlement prohibant le délit d'initié. »

3) Conclusion

Les tests empiriques n'apportent qu'une validation partielle de l'hypothèse d'efficience des marchés financiers, qu'on en retienne la forme faible, semi forte ou forte. L'hypothèse reste pour l'essentiel dans le champ de la théorie.

Elle a pourtant fondé des méthodes et des outils d'analyse et d'action largement répandus chez les professionnels de la finance de marché. Le reste de cette leçon y est consacré.

[8] *Op. cit.* p.126.

B) DIVERSIFICATION DES RISQUES ET GESTION DE PORTEFUILLE

1) Titres et portefeuilles

i) *Appréciation du risque avec un seul titre*

L'analyse quantitative de la valeur d'un titre prend appui sur deux indicateurs principaux : un indicateur de performance (le prix, le revenu) et un autre de risque (la variance de cet indicateur ou son écart-type. La combinaison de ces deux indicateurs en donne une valuation synthétique.

Encadré 1 :

Appréciation du risque

Supposons un titre T qui peut prendre des valeurs (cours) $p_1, .. p_i .., p_n$, respectivement avec les probabilités $a_1, .. a_i .., a_n$. La valeur moyenne du prix et la variance sont alors :

$\overline{p}_T = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot p_i)$ et $\sigma_T^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \times (p_i - \overline{p}_A)^2$. L'écart type est $\sigma_T = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (p_i - \overline{p}_T)^2}$

L'appréciation relative du risque peut se faire par le coefficient de variation V_T, soit

$$V_T = \frac{\sigma_T}{\overline{p}_T}$$

On limite le risque en choisissant le coefficient de variation le plus faible.

ii) *Gain et risque dans une gestion à deux titres*

Soit un portefeuille P comportant deux titres A et B, p_P, p_A et p_B leurs prix respectifs et R_P, R_A et R_B les revenus qu'ils engendrent, σ_P, σ_A et σ_B les écarts types.

Soit ensuite le portefeuille comportant a titres A et b titres B. Les prix les gains et les risques s'écrivent comme il est figuré dans l'encadré 2.

ENCADRE 2 :

APPRECIATION DU RISQUE DANS UN PORTEFEUILLE A DEUX TITRES (1)

<u>a = b = 1 :</u>

S'il s'agit de valeurs certaines : $p_P = p_A + p_B$ et $R_P = R_A + R_B$

S'il s'agit de valeurs espérées : $\overline{p}_P = \overline{p}_A + \overline{p}_B$ et $\overline{R}_P = \overline{R}_A + \overline{R}_B$

Les variances des prix et des revenus s'écrivent :

$$\sigma^2_{pP} = \sigma^2_{pA} + \sigma^2_{pB} + 2\sigma_{pApB}$$

où σ_{pApB} est la covariance des prix de A et B,

On a de même $\sigma^2_{RP} = \sigma^2_{RA} + \sigma^2_{RB} + 2\sigma_{RARB}$

$$Cov(p_A, p_B) = \sigma_{pApB} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(p_{Ai} - \overline{p}_A) \cdot (p_{Bi} - \overline{p}_B) \right]$$

et $$Cov(R_A, R_B) = \sigma_{RARB} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(R_{Ai} - \overline{R}_A) \cdot (R_{Bi} - \overline{R}_B) \right]$$

On écrit les coefficients de corrélation entre prix d'une part, revenus d'autre part :

$\rho_{pApB} = \dfrac{\sigma_{pApB}}{\sigma_{pA} \cdot \sigma_{pB}}$ et $\rho_{RARB} = \dfrac{\sigma_{RARB}}{\sigma_{RA} \cdot \sigma_{RB}}$ d'où il ressort :

$\sigma^2_{pP} = \sigma^2_{pA} + \sigma^2_{pB} + 2\sigma_{pA} \cdot \sigma_{pB} \cdot \rho_{pApB}$ et $\sigma^2_{RP} = \sigma^2_{RA} + \sigma^2_{RB} + 2\sigma_{RA} \cdot \sigma_{RB} \cdot \rho_{RARB}$

Coefficient de variation du prix de *P* :

$$V_{pP} = \frac{\overline{p}_P}{\sigma_{pP}} = \frac{\overline{p}_A + \overline{p}_B}{\sqrt{\sigma^2_{pA} + \sigma^2_{pB} + 2\sigma_{pA} \cdot \sigma_{pB} \cdot \rho_{pApB}}}$$

Coefficient de variation du revenu de *P* :

$$V_{RP} = \frac{\overline{R}_P}{\sigma_{RP}} = \frac{\overline{R}_A + \overline{R}_B}{\sqrt{\sigma^2_{RA} + \sigma^2_{RB} + 2\sigma_{RA} \cdot \sigma_{RB} \cdot \rho_{RARB}}}$$

ENCADRE 2 :

APPRECIATION DU RISQUE DANS UN PORTEFEUILLE A DEUX TITRES (2)

a et b quelconques :

On écrit les relations suivantes pour les prix et les rentabilités :

$$p_P = a\cdot p_A + b\cdot p_B \quad \text{et} \quad R_P = a\cdot R_A + b\cdot R_B$$

$$\overline{p}_P = a\cdot \overline{p}_A + b\cdot \overline{p}_B \quad \text{et} \quad \overline{R}_P = a\cdot \overline{R}_A + b\cdot \overline{R}_B$$

$$\sigma^2_{pP} = a^2\cdot\sigma^2_{pA} + b^2\cdot\sigma^2_{pB} + 2\cdot a\cdot b\cdot\sigma_{pApB} \quad \text{et} \quad \sigma^2_{pP} = a^2\cdot\sigma^2_{pA} + b^2\cdot\sigma^2_{pB} + 2\cdot a\cdot b\cdot\sigma_{pA}\cdot\sigma_{pB}\cdot\rho_{pApB}$$

$$\sigma^2_{RP} = a^2\cdot\sigma^2_{RA} + b^2\cdot\sigma^2_{RB} + 2\cdot a\cdot b\cdot\sigma_{RARB} \quad \text{et} \quad \sigma^2_{RP} = a^2\cdot\sigma^2_{RA} + b^2\cdot\sigma^2_{RB} + 2\cdot a\cdot b\cdot\sigma_{RA}\cdot\sigma_{RB}\cdot\rho_{RARB}$$

Coefficient de variation du prix de *P* :

$$V_{pP} = \frac{\overline{p}_P}{\sigma_{pP}} = \frac{a\cdot\overline{p}_A + b\cdot\overline{p}_B}{\sqrt{a^2\sigma^2_{pA} + b^2\sigma^2_{pB} + 2ab\sigma_{pA}\cdot\sigma_{pB}\cdot\rho_{pApB}}}$$

Coefficient de variation du revenu :

$$V_{RP} = \frac{\overline{R}_P}{\sigma_{RP}} = \frac{a\cdot\overline{R}_A + b\cdot\overline{R}_B}{\sqrt{a^2\sigma^2_{RA} + b^2\sigma^2_{RB} + 2ab\sigma_{RA}\cdot\sigma_{RB}\cdot\rho_{RARB}}}$$

iii) *Evolutions relatives des deux titres*

La gestion de portefeuille repose sur la neutralisation du risque d'un titre par un autre titre. Si les titres sont indépendants l'un de l'autre, la neutralisation ne joue pas et les risques s'ajoutent. Si les titres ont des évolutions constatées inverses, la baisse des prix (ou des revenus) remarquée sur l'un est compensée par la hausse de l'autre. Inversement le gain apporté par l'un est en partie au moins consacré à compenser les mauvais résultats de l'autre. Si enfin les titres évoluent en phase les gains (vs. les pertes) se renforcent mutuellement en période de bons (mauvais) résultats.

La variance du portefeuille, exprimée en fonction de celles des titres, permet de mesurer ce phénomène. Dans la relation précédente de la variance c'est le coefficient de corrélation qui exprime la dépendance entre les titres. L'encadré 2 expose le principe pour les l'un ou l'autre des indicateurs (prix ou revenu).

ENCADRE 2 :

DEPENDANCE DES EVOLUTIONS DES TITRES DANS LE PORTEFEUILLE

On simplifie les conditions d'écriture de la façon suivante :

Soit A et B deux titres, σ_P, σ_A et σ_B les écarts types respectifs du portefeuille et des titres pour la variable (prix ou revenu), σ_{AB} la covariance de A et B, ρ_{AB} leur coefficient de corrélation.

Avec bien entendu : $-1 \leq \rho_{AB} \leq +1$

La variance du portefeuille s'écrit : $\sigma_P^2 = a^2\sigma_A^2 + b^2\sigma_B^2 + 2ab\sigma_A \times \sigma_B \times \rho_{AB}$

<u>Si A et B sont parfaitement indépendants l'un de l'autre :</u> $\rho_{AB} = 0$

La variance du portefeuille s'écrit alors : $\sigma_P^2 = a^2\sigma_A^2 + b^2\sigma_B^2$

C'est la somme des variances de tous les titres composant le portefeuille.

<u>Si A et B sont parfaitement corrélés positivement :</u> $\rho_{AB} = +1$

La variance du portefeuille s'écrit : $\sigma_P^2 = a^2\sigma_A^2 + b^2\sigma_B^2 + 2ab\sigma_A \times \sigma_B$

Soit encore : $\sigma_P^2 = (a\sigma_A + b\sigma_B)^2$

La variance du portefeuille (son risque) amplifie la somme des variances des titres (le risque propre à chacun).

<u>Si A et B sont parfaitement corrélés négativement :</u> $\rho_{AB} = -1$

La variance du portefeuille s'écrit : $\sigma_P^2 = a^2\sigma_A^2 + b^2\sigma_B^2 - 2ab\sigma_A \times \sigma_B$

Soit encore : $\sigma_P^2 = (a\sigma_A - b\sigma_B)^2$

La variance du portefeuille (son risque) est réduite par la compensation des risques associés aux différents titres.

Si on fait en sorte que : $a\sigma_A = b\sigma_B$ soit $b = a \times \frac{\sigma_A}{\sigma_B}$ alors: $\sigma_P^2 = 0$

Les risques associés aux titres se sont compensés et le risque du portefeuille est nul.

iv) *Généralisation*

Quand le portefeuille comporte un nombre de titres supérieur à deux, les relations générales du prix, du revenu et du risque s'établissent comme proposé dans l'encadré 3.

ENCADRE 3 :

ECRITURE GENERALE POUR *n* TITRES

Soit un portefeuille P comportant des titres A_1… A_i… A_n en quantités a_1… a_i… a_n. Pour une variable donnée, par exemple ici le revenu,

On appelle $E(R_i)$ le revenu espéré du titre A_1 et $E(R_i)$ le revenu espéré du portefeuille :

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(R_i)$$

La variance et l'écart type du portefeuille s'écrivent :

$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \sigma_{ij}$ dans lequel $\sigma_{ij} = cov(R_i, R_j)$.

Et $\sigma_P = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \sigma_{ij}\right]^{\frac{1}{2}}$

Si i=j, σ_{ij} est la variance de R_i et $a_i \cdot a_j \cdot \sigma_{ij} = a_i^2 \cdot \sigma_i^2$

Les σ_{ij} sont les éléments de la matrice des covariances des R_i quand i=1…n.

Avec ρ_{ij} le coefficient de corrélation entre R_i et R_j , variance et écart type s'écrivent :

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \quad \text{et} \quad \sigma_P = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j\right]^{\frac{1}{2}}$$

v) *Titres, portefeuilles et du marché : le BÊTA*

Risque du titre par rapport au marché

L'autre outil de référence est celui qui permet de rapporter la rentabilité et le risque des titres et des portefeuilles à ceux du marché.

Dans ce cas la performance d'un titre (son prix ou sa rentabilité par exemple) est décomposée en deux parties.

- ✓ L'une qui est le résultat de l'influence du marché : quand le marché est à la hausse, ce mouvement correspond à une variation à la hausse ou à la baisse pour chacun des titres.
- ✓ L'autre qui est dû aux caractéristiques du titre lui-même et qu'on appelle performance spécifique ou résiduelle

Le coefficient β mesure la relation entre la performance du marché et celle du titre.

ENCADRE 4 :

RENTABILITE DU TITRE ET DU MARCHE – LE β

On appelle R_M la rentabilité du marché et $E(R_M)$ son espérance mathématique.

On désigne par p_i les n probabilités des rentabilités de marché R_{Mi}.

$$E(R_M)=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot R_{Mi} = \overline{R}_M \quad \text{et} \quad \sigma_M^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(R_{Mi} - \overline{R}_M\right)^2$$

On appelle R_A la rentabilité du titre A et $E(R_A)$ son espérance mathématique.

On écrit la covariance entre la rentabilité du marché et celle du titre :

$$\sigma_{MA} = Cov(M,A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times \left(R_{Mi} - \overline{R}_M\right)\left(R_{Ai} - \overline{R}_A\right) \quad \text{avec} \quad \overline{R}_A = E(R_A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot R_{Ai}$$

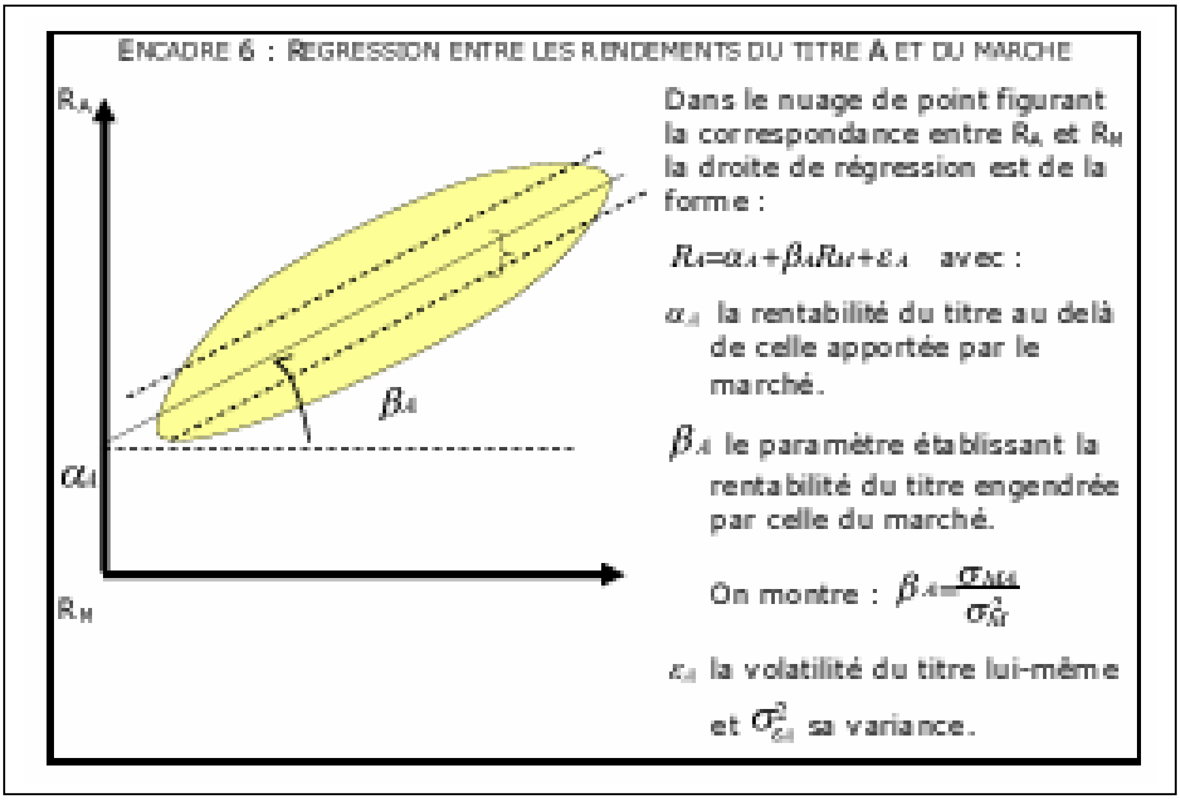
On appelle β_A de l'action A le rapport : $\beta_A = \dfrac{\sigma_{MA}}{\sigma_M^2}$

Il mesure le risque que le marché fait peser sur le rendement de l'action.

Encadré 5 : Coefficient β et relation entre titre et marché		
Si $\beta > 2$	La rentabilité du marché entraîne celle du titre	Titre hypersensible au marché
$2 \geq \beta > 1$		Titre sensible au marché
$1 \geq \beta > 0$		Titre peu sensible au marché
$\beta = 0$	La rentabilité du titre est insensible aux variations de rentabilité du marché	
$0 \geq \beta > -1$	La rentabilité de l'action s'oppose à celle du marché	Titre peu sensible au marché
$-1 \geq \beta > -2$		Titre sensible au marché
$\beta \leq -2$		Titre hypersensible au marché

Portefeuille à un seul type d'actions

Supposons le portefeuille constitué de titres d'une seule société A. On construit la régression entre la rentabilité du marché et celle du titre A (encadré 6).



On mesure par le coefficient de corrélation l'importance des écarts entre les points constituant le nuage et la droite de régression. Il établit la répartition du risque entre celui dû au marché (risque systématique) et celui dû au titre lui-même (risque spécifique).

ENCADRE 7 : CORRELATION ET RISQUE

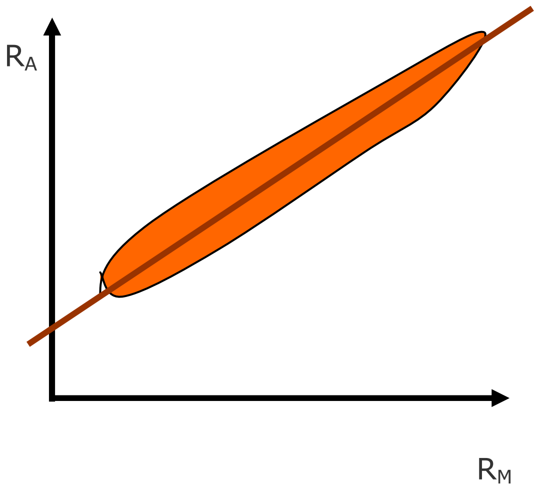
La valeur absolue du coefficient de corrélation ρ_{AB} mesure les écarts des points du nuage à la droite de régression. On prend ρ^2_{MA}.

On décompose le risque en deux parts :

Le risque de marché, égal à : $\beta^2\sigma^2_M$ et le risque propre à l'action : σ^2_ε

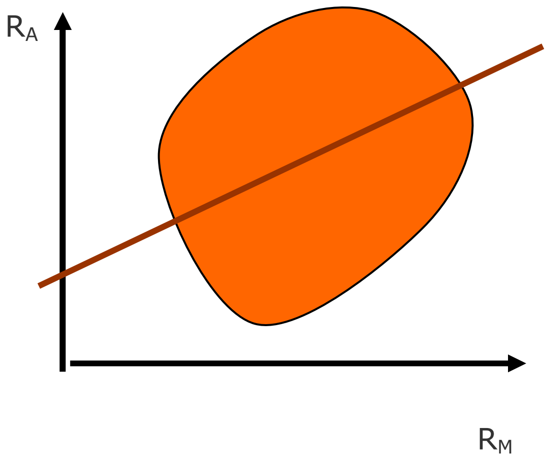
Si $\rho^2_{MA} \rightarrow 1$, les points du nuage sont sur la droite de régression ou proche d'elle.

$\sigma_{\varepsilon A} \rightarrow 0$ le risque qui pèse sur la rentabilité du titre est le risque systématique du marché (risque systématique fort).



Si au contraire $\rho^2_{MA} \rightarrow 0$ le nuage est très étendu autour de la droite de régression.

Le risque systématique tend vers 0 puisque les rentabilités sont peu corrélées. Il ne reste que le risque propre au titre (risque spécifique fort).



Diversification et modèle de marché

Considérons à présent la situation dans laquelle le portefeuille est constitué de plusieurs types de titres différents.

Le risque du portefeuille dépend désormais de trois séries de facteurs :

- Ceux qui affectent le risque du marché, dans la mesure où chaque titre est lié au marché par son coefficient β.
- Les facteurs qui déterminent le risque spécifique attaché à chaque titre en influençant la variance du résidu σ^2_ε.

Enfin les corrections liées à la diversification du portefeuille et qui dépendent des covariances entre les titres.

ENCADRE 7 : DIVERSIFICATION ET RISQUE DE MARCHE

Soit des actions A_1… A_i… A_n de rendements unitaires R_1… R_i… R_n et figurant en quantités a_1… a_i… a_n dans un portefeuille P de rendement R_P.

Appelons β_i le Bêta associé au titre i et β_P celui du portefeuille.

On établit : $\beta_P = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_n\beta_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\beta_i$

Le risque de chaque titre associe le risque du marché et le risque spécifique :

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2$$

Supposons à présent $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$

Le risque du portefeuille s'écrit : $\sigma_P^2 = \beta_P^2\sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon P}^2$ dans lequel $\beta_P = \frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}{n}$

Soit $\overline{\sigma}_{\varepsilon i}^2$ la valeur moyenne des risques spécifiques des titres : $\overline{\sigma}_{\varepsilon i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{\varepsilon i}^2}{n}$

On peut écrire le risque spécifique du portefeuille : $\overline{\sigma}_P^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_{\varepsilon i}^2}{n^2}$

Ces deux dernières relations permettent d'écrire : $\sigma_{\varepsilon P}^2 = \frac{\overline{\sigma}_{\varepsilon i}^2}{n}$

Quand $n \to \infty$ alors : $\sigma_{\varepsilon P}^2 \to 0$

Conclusion : les risques spécifiques liés aux titres tendent à se compenser et sous certaines hypothèses à s'annuler quand la diversification du portefeuille s'accroît.

Seules les sensibilités des titres au marché (représentées par leurs coefficients β_i) fait varier le risque du portefeuille.

2) Le modèle de Markovitz

Harry M. Markovitz est considéré comme le fondateur de la théorie financière moderne. Il pose les bases de la théorie du portefeuille dans les années 50 avec un article [1952] puis un ouvrage [1959][9]. C'est un statisticien. Son point de départ est l'observation des performances obtenues par les professionnels de la gestion de titres et le constat que sur une période assez longue ils n'obtiennent pas des résultats supérieurs à ceux du marché.

Il en tire la conclusion suivante : « Les performances des agences de prévision sont en moyenne inférieures à ce qu'on obtient uniquement par chance ».

Il observe par ailleurs que : « donner des conseils sur les marchés contre rémunération est un paradoxe. Quelqu'un qui sait vraiment quelque chose n'a pas intérêt à le partager alors qu'il pourrait devenir l'homme le plus riche du Monde ».

Sa première conclusion est une affirmation par anticipation de l'hypothèse de la marche aléatoire des marchés et de leur efficience. Si les acteurs les plus compétents et les mieux informés du marché – dont les moyens de prévision sont les plus élaborés et renseignés – ne font pas mieux que la moyenne des acteurs, c'est qu'il n'y a rien à faire dans ce domaine.

i) *Les hypothèses*

Hypothèses sur les actifs financiers

Hypothèse 1 : Tout investissement est une décision prise dans un contexte de risque.

Le taux de revenu d'un actif financier – soit $\mathbf{R_i}$ avec **i =1…n** les différents actifs financiers – est donc une variable aléatoire. On la suppose distribuée selon une loi normale définie par :

- ✓ Son espérance mathématique : $\overline{R}_i = E(R_i)$
- ✓ Sa variance (ou son écart type) : $\sigma_i^2 = \sigma_{Ri}^2 = (\sigma_{Ri})^2$

Hypothèse 2 : Les revenus des titres ne sont pas indépendants les uns des autres.

Les covariances entre chacun des couples de titres ne sont pas nulles, ce qui s'écrit :

- ✓ $Cov(R_i, R_j) = \sigma_{ij} \neq 0$ pour $i,j = 1 \ldots n$.
- ✓ $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \neq 0$

Hypothèse sur le comportement des acteurs

Hypothèse 3 : Les investisseurs sont rationnels.

[9] Markovitz H.M.[1959], *Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investment*, New York : John Wiley.

Ils ont des préférences subjectives qu'ils savent classer. Leurs classements sont strictement transitifs et répondent aux critères de von Neumann et Morgenstern.[10]

Hypothèse 4 : Les investisseurs manifestent une aversion pour le risque.

Le risque est mesuré par l'écart type des valeurs prises par le taux de revenu. Les investisseurs connaissent cet écart type.

Leur aversion est plus ou moins prononcée mais ils en connaissent l'importance comme une expression de leurs préférences subjectives.

Hypothèse 5 : Tous les investisseurs ont le même horizon de décision.

Cette hypothèse n'a d'autre objet que la simplification du raisonnement : les décisions des acteurs sont ramenées à une seule période qui est celle définie par cet horizon.

ii) *L'arbitrage entre revenu et risque*

Par ces cinq hypothèses, Markovitz inscrit son analyse dans le cadre strict de l'analyse économique néoclassique standard. La modélisation qu'il propose reprend les canons de la microéconomie classique.

Le problème

La décision est un problème d'allocation. Elle consiste pour l'investisseur à répartir un budget donné limité entre des actifs négociables sur le marché.

ENCADRE 1 : LES CONSTITUANTS DU PROBLEME DU CHOIX

Soit x_i la part du budget consacrée à l'actif i, avec $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

On pose en général : $0 \leq x_i \leq 1$

On peut aussi avoir $x_i \leq 0$ si des titres sont vendus et $x_i > 1$ si un emprunt permet d'acheter des titres au-delà de ce que le budget permet.

Un portefeuille est un vecteur des x_i soit $[x_i]$.

Au portefeuille est associé une distribution normale des revenus caractérisée par :

Le rendement espéré : $\overline{R}_P = E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i)$

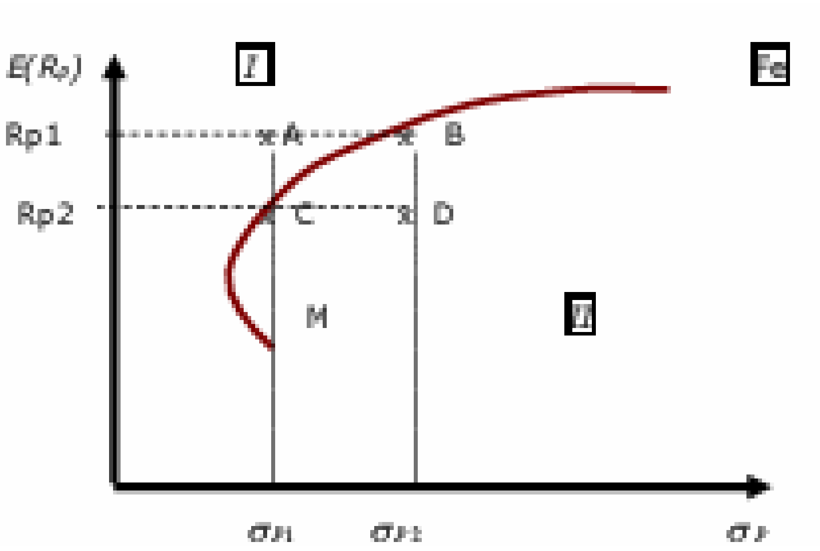
Le risque : $\sigma_P = \sigma_{R_P} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \right]^{\frac{1}{2}}$

[10] Se reporter si nécessaire à Kast R.[1993], *La théorie de la décision*, Paris : La Découverte, coll. Repères.

Frontière d'efficience

Markovitz trace une frontière d'efficience de la relation entre revenu et risque dans l'espace **{ σ_P , *E(RP)*}.**

ENCADRE 2 : REPRESENTATION DE LA FRONTIERE D'EFFICIENCE



La frontière d'efficience $\boxed{Fe}$ organise une partition de l'espace en trois sous-espaces :

Le sous espace $\boxed{I}$ situé au-dessus de la frontière et dont les couples (σ_P , Rp) ne peuvent être obtenus.

- Le niveau de risque accepté en A (σ_{P1}) ne permet pas d'obtenir le taux de rentabilité Rp1. Ce niveau de risque limite la prétention de rentabilité à Rp2 soit une migration de A vers C.
- Le taux de rentabilité exigé en A (Rp1) n'est possible que si le risque est au moins égal à σ_{P2} . Ce niveau implique une migration de A vers B.

A l'inverse tous les couples (σ_P , Rp) appartenant au sous espace $\boxed{II}$ situé sous la frontière Fe (par exemple en D) peuvent être obtenus mais ne peuvent être considérés comme satisfaisants.

- Le niveau de risque accepté en D (σ_{P2}) est compatible avec des taux de rentabilité supérieurs à Rp2, dans la limite supérieure de Rp1. Ce dernier niveau suppose la migration de D vers B.
- Le taux de rentabilité Rp2 de D peut être obtenu à moindre risque, jusqu'au minimum de σ_{P2} par migration de D vers C.
- Le troisième sous-espace est la frontière d'efficience elle-même. Elle est convexe ce qui signifie qu'en tous ses points on ne peut augmenter le taux de rentabilité qu'en accroissant le risque et baisser le risque qu'en réduisant le taux de rentabilité.

Le choix d'une solution

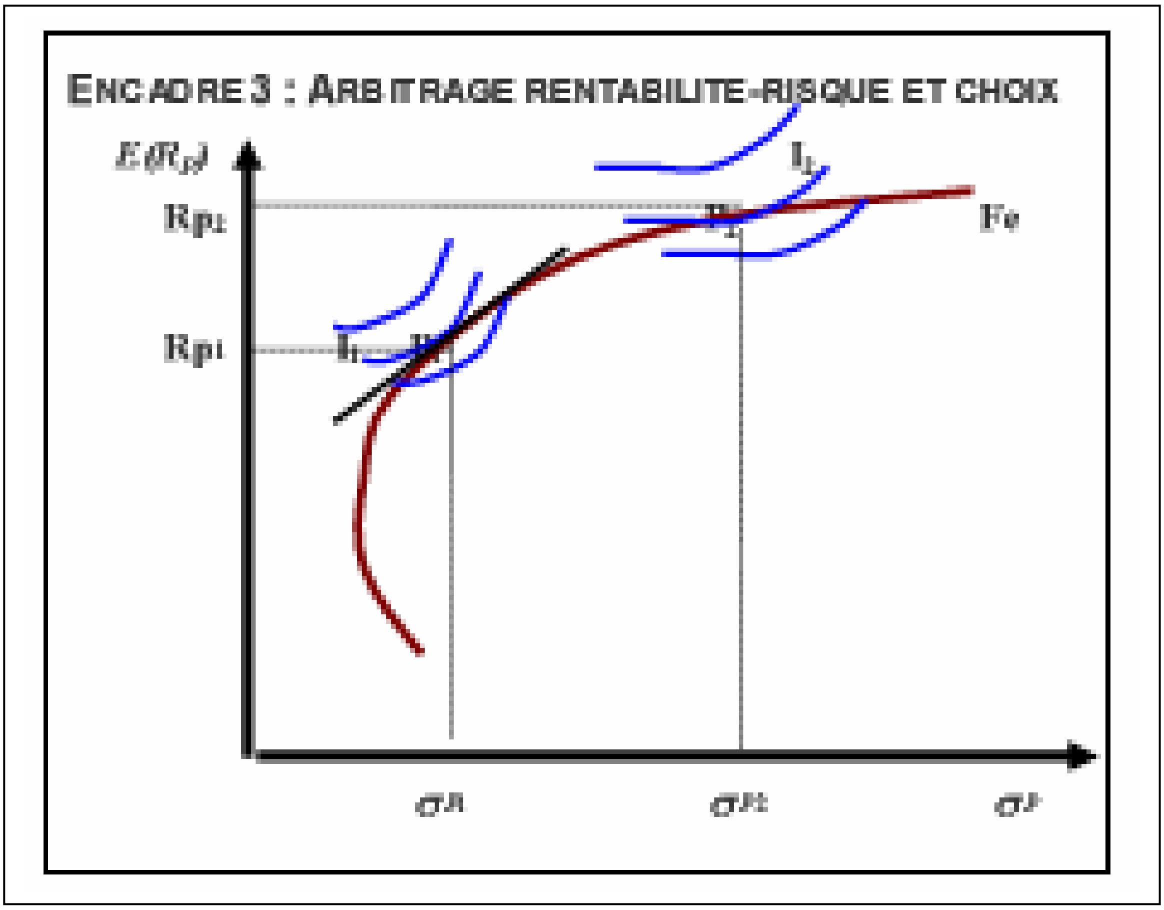
Deux investisseurs 1 et 2 manifestent des arbitrages rentabilité-risque différents, représentés par les cartes d'indifférence I_1 et I_2. La pente des courbes d'indifférence en un point exprime l'aversion pour le risque : plus elle est élevée, plus le sacrifice de rentabilité accepté pour réduire le risque l'est aussi ; plus elle est faible plus le risque est accepté pour préserver la rentabilité.

Dans le schéma ci-dessus l'investisseur 1 exprime une aversion plus élevée pour le risque que 2.
Plus un investisseur parvient à une courbe d'indifférence d'ordonnée élevée plus l'utilité (le taux de rentabilité) qu'il retire de son portefeuille est elle-même élevée. Les niveaux d'utilité les plus élevés compatibles avec la limite d'efficience sont celles qui sont tangentes à la frontière d'efficience, respectivement en P_1 et P_2 pour les deux investisseurs.

Ces derniers doivent donc chercher la combinaison de titres qui leur permettent de maximiser leur utilité sous contrainte des conditions du marché de telle sorte que :

- L'investisseur 1, dont l'aversion pour le risque est plus élevée, obtienne une espérance de gain Rp1 avec une acceptation du risque σ_{P1}.
- L'investisseur 2, dont l'aversion pour le risque est plus faible, obtienne une espérance de gain Rp2 avec une acceptation du risque σ_{P2}.

Les positions sur le graphique figurent les différences de comportement face au risque



iii) *La diversification des portefeuilles : modèle à deux actifs*

La proposition de Markovitz permet une formulation plus rigoureuse du concept de diversification. Il montre que le portefeuille qui respecte le mieux la fonction de préférence de l'investisseur – la meilleure rentabilité compte tenu de son arbitrage entre revenu et risque – est aussi diversifié de façon optimale. C'est ce qu'il appelle la diversification efficiente.

Pour comprendre comment se construisent les outils qu'il propose on part généralement d'un exemple à deux actifs pour observer la construction de la frontière d'efficience sous différentes valeurs du coefficient de corrélation.

Cas de deux actifs parfaitement corrélés positivement : $\rho_{ij}=+1$

ENCADRE 4-1 : DIVERSIFICATION ET PERFORMANCE QUAND $\rho_{ij}=1$

Soit deux actifs *i* et *j* entrant dans le portefeuille *P* en proportions x_i et x_j, avec x_i et $x_j \geq 0$ et $x_i + x_j = 1$. On appelle $E(R_i)$ et $E(R_j)$ les espérances de taux de rentabilité des deux titres et σ_i et σ_j les écarts types constatés de ces rentabilités.

On utilisera dans l'exemple les données :

Actif	Rentabilité espérée	Ecart type
i	5%	10%
j	15%	20%

Le portefeuille *P* a une espérance de taux de rentabilité :

$$E(R_P)=0{,}05x_i+0{,}15x_j$$

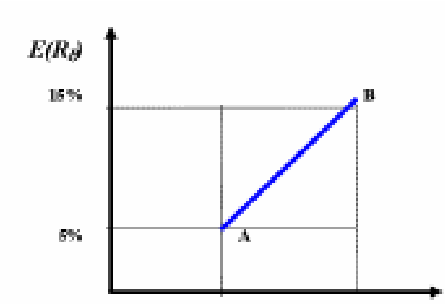
La variance mesurant son risque est : $\sigma_P^2 = x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + x_j^2 \cdot \sigma_j^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$

On part de la situation où $x_i=1$ et $x_j=0$. Le portefeuille n'est pas diversifié.

Quand le coefficient de corrélation $\rho_{ij}=1$: $\sigma_P^2=(x_i\sigma_i+x_j\sigma_j)^2$ et

$\sigma_P=0{,}1x_i+0{,}2x_j$.

Le risque et l'espérance de gain augmentent donc chacun proportionnellement à x_j. Ceci se représente dans le graphique suivant :



Cas de deux actifs parfaitement corrélés négativement : $\rho_{ij} = -1$

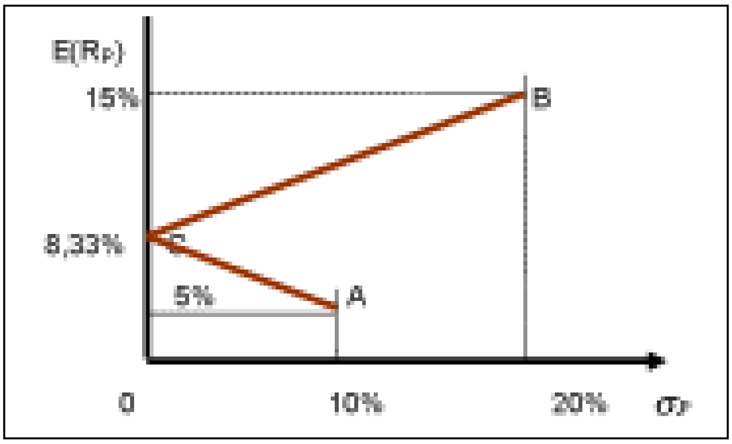
ENCADRE 4-2 : DIVERSIFICATION ET PERFORMANCE QUAND $\rho_{ij} = -1$

Existe-t-il une valeur pour laquelle $\sigma_P = 0$?

$$\sigma_P^2 = x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + x_j^2 \cdot \sigma_j^2 + 2x_i \cdot x_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = (x_i \cdot \sigma_i - x_j \cdot \sigma_j)^2 = 0$$

Avec les valeurs numériques, $0{,}1 \cdot x_i - 0{,}2 \cdot x_j = 0$. Comme $x_j = 1 - x_i$: $x_i = 2/3$ et $x_j = 1/3$.

Quand x_j croît la correspondance rentabilité risque va de A à B en passant par C de risque 0 et de rentabilité : 2/3.5% + 1/3.15% = 8,33%



De A à C la rentabilité croît par augmentation de la part du titre à rendement élevé alors que le risque décroît grâce à la diversification. En C la diversification a produit son effet maximum. Au-delà de C son effet se réduit progressivement : risque et rendement s'accroissent ensemble.

Cas d'une corrélation quelconque : $-1 \leq \rho_{ij} \leq +1$

Pour toutes les valeurs du coefficient de corrélation entre −1 et +1, les solutions s'inscrivent ans le triangle ABC.

Dans l'encadré 4-3 figure la courbe dans le cas – qui n'est qu'un cas parmi les autres – où $\rho_{IJ}=0$.

La lecture de cette courbe signifie que la diversification à ses débuts – quand on s'y déplace de A vers B – permet d'accroître la rentabilité tout en réduisant le risque. C'est ce qui se passe dans un premier temps, jusqu'à E. Puis le risque croît avec la rentabilité espérée mais jusqu'à D il reste inférieur à 10% : sur tout ce segment AD la diversification apporte un gain absolu en risque par rapport au titre unique alors que la rentabilité augmente jusqu'à 9%, correspondant à 60% de titres i et 40% de titres j. Puis de D à B le risque est accru malgré la diversification mais avec l'espérance d'une rentabilité élevée

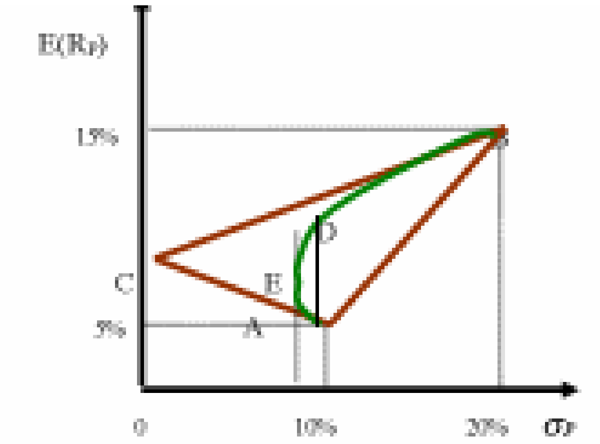
ENCADRE 4-3 : DIVERSIFICATION ET PERFORMANCE QUAND $-1 \leq \rho_{ij} \leq +1$: exemple $\rho_{ij} = 0$

Dans ce cas : $\sigma_P^2 = 0{,}01 \cdot x_i^2 + 0{,}04 \cdot x_j^2$ et $E(R_P) = 0{,}05 \cdot x_i + 0{,}15 \cdot x_j$

Le tableau suivant donne les valeurs numériques quand x_j croît et x_i décroît.

x_j	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$E(R_P)$	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
σ_P	10%	9,2%	8,9%	9,2%	10%	11,2%	12,6%	14,3%	16,1%	18%	20%

La courbe représentative de ces valeurs est représentée par la courbe AB qui suit :



La diversification des portefeuilles : généralisation

ENCADRE 5 : DIVERSIFICATION ET PERFORMANCE : GENERALISATION A N TITRES

On appelle covariance moyenne entre les rentabilités des titres *i,j=1…n*,

avec *i≠j* : $\bar{\sigma}_{ij} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\sigma_{ij}}{\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}}$ où le numérateur somme les [n.(n-1)]/2.

On pose que le montant P portefeuille est réparti entre les titres pour des sommes identiques. On pose toutes les espérances de rentabilités identiques, S_R leur somme et w_R leur moyenne :

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} E(R_i) = nE(Ri) \text{ avec } R_1 = .. = R_i = .. = R_n \quad \text{et} \quad w_R = \frac{S_R}{n} = E(Rp)$$

Les variances de la somme des rentabilités et de leur moyenne :

$$\sigma_{S_R}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\sigma_{ij} \quad \text{et} \quad \sigma_P^2 = \sigma_{w_R}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sigma_{S_R}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}{n^2} + \frac{(n-1)\cdot\bar{\sigma}_{ij}}{n}$$

Quand n s'accroît le premier terme tend vers 0 et le second vers la covariance moyenne.

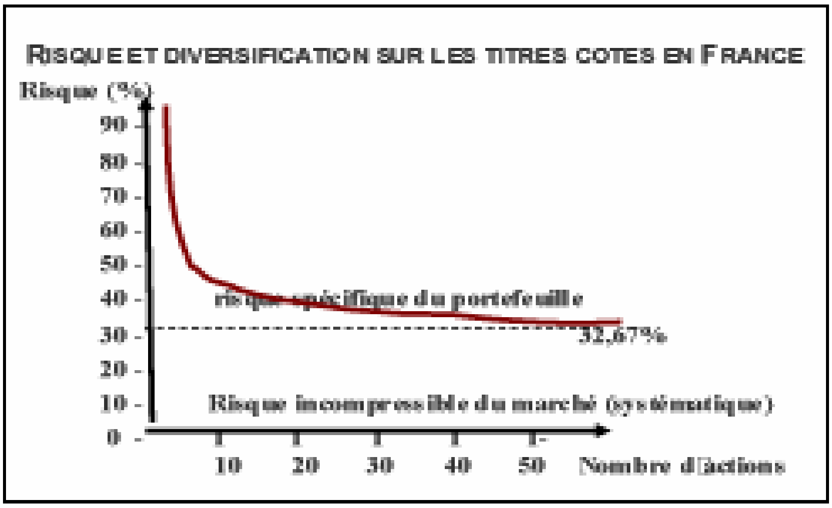
Quand $n \to \infty$ alors : $\sigma_P^2 \to \bar{\sigma}_{ij}$

La conclusion est que le risque du portefeuille diminue avec sa diversification jusqu'à une limite inférieure qui est la covariance moyenne les titres du portefeuille dans les hypothèses de cette démonstration.

La clé de la réduction des risques est donc dans la matrice des covariances. Le cas traité dans l'encadré 4-2 (deux titres parfaitement corrélés négativement) est un cas limite. Il est à partir de là impossible de composer un portefeuille de plus de deux titres conduisant à une telle neutralisation du risque.

Limite aux effets de la diversification

Diverses études empiriques menées dans les principales places financières. Elles confirment la décroissance du risque avec le nombre de titres différents dans le portefeuille.



En ordonnées le risque mesure le risque du portefeuille. En abscisses le nombre d'actions du portefeuille. Pour chaque pays étudié le risque cesse de baisser significativement quand le portefeuille comporte une quinzaine de titres différents.

Par contre le risque Systématique du marché est différent d'une place financière à l'autre, marquant probablement des niveaux différenciés des covariances moyennes entre les titres inscrits. Jacquillat et Solnik font apparaître 27% de risque systématique aux Etats-Unis (titres inscrits au NYSE), 34,5% au Royaume-Uni, 43,8% en Allemagne, 40% en Italie, 20% en Belgique, 24,1% aux Pays-Bas et 44% en Suisse.

Dit autrement, le risque incompressible du portefeuille est la moyenne pondérée des paramètres **β** comme il a été vu par ailleurs. La diversification n'affecte pas ces paramètres ni bien entendu leur moyenne. Si le portefeuille est bien diversifié son risque spécifique devient nul et seul reste le risque de marché.

3) Le modèle de Sharpe

Le modèle proposé par H.M. Markovitz en 1959 présentait des difficultés d'utilisation liées :

- D'une part au besoin qu'il engendrait d'une connaissance complète de la matrice des covariances. Or l'estimation de celles-ci avec une précision et une cohérence suffisante posait des problèmes techniques.
- D'autre part à la taille de la matrice des covariances (45 données pour 10 titres mais 4950 pour cent titres et 44.850 éléments pour 300 titres !) et aux capacités de calcul – peu disponibles à l'époque – que cela nécessitait.

En 1963 *William Sharpe* proposa une solution simplificatrice reposant sur le recours à un modèle à un indice (uni-factoriel).

i) *Le principe du modèle*

La méthode consiste à construire un modèle uni-factoriel puis, quand la pertinence de ce modèle est établie, à construire une version simplifiée du modèle de Markovitz dit modèle diagonal.

Le modèle à un indice

W. Sharpe suppose les rentabilités des actions liées entre elles exclusivement par la référence à un facteur sous-jacent dont dépend leur niveau. Ce facteur est représenté par un indice ***I***. Ce peut être un indice de prix, de croissance, une grandeur macro-économique, le niveau d'activité sur certains marchés, etc. Cet indice est lui-même une variable exogène aléatoire.

Dans cette formulation le nuage de points représentant les couples $(\sigma_P, E(R_P))$ sont distribués doublement selon une loi normale :

- o L'une qui résulte de l'aléa sur l'indice ***I***, de moyenne $E(I)=\alpha_{n+1}$ et d'écart-type $\sigma_{n+1}=\sqrt{Q_{n+1}}$.
- o L'autre, pour chaque valeur de I, de moyenne $E(R_i)=\alpha_i+\beta_i \cdot I$ et d'écart type $\sqrt{Q_i}$.

Encadré 1 : Structure de base du modèle à un indice

On a donc $R_i=\alpha_i+\beta_i \cdot I+u_i$ avec :

- o R_i le revenu du titre,
- o I représentant l'indice sous-jacent,
- o α_i et β_i des estimateurs spécifiques au titre *i*,
- o u_i un résidu aléatoire spécifique à *i* et donc tel que :

$$E(u_i)=0 \;;\; \sigma^2_{u_i}=\text{constante}=Q_i \;\text{ et } \sigma_{u_i u_j}=0 \text{ pour } \forall i,j=1,..,n \text{ et } i\neq j.$$

L'indice I est une variable aléatoire $I=\alpha_{n+1}+u_{n+1}$ dotée des propriétés suivantes :

- o $E(I)=\alpha_{n+1}$, la rentabilité espérée de l'indice est donc un paramètre.
- o $\sigma^2_{u\,n+1}=\text{constante}=Q_{n+1}$

L'indice figure alors comme un titre supplémentaire, le (n+1)$^{\text{ème}}$ titre.

Le modèle diagonal

Si le modèle uni-factoriel est vérifié empiriquement Sharpe propose d'une version simplifiée du modèle de Markovitz.

Encadré 2 : Le modèle diagonal de Sharpe

Le revenu du portefeuille est $R_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i$ où x_i est la part du capital consacrée à i.

$$x_i \cdot R_i = x_i \cdot (\alpha_i + \beta_i \cdot I + u_i)$$

Le revenu du portefeuille a donc une double composante :

- Une composante systématique qui résulte du fait que chacun des titres représente un investissement dans l'indice I, soit n fois $x_i \cdot \beta_i \cdot I$.
- Une composante spécifique que lui apportent les caractéristiques propres à chaque titre, soit n fois $x_i \cdot (\alpha_i + u_i)$

On a donc $R_P = \sum_{i=1}^{n} [x_i \cdot (\alpha_i + u_i)] + (\alpha_{n+1} + u_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot \beta_i)$

On pose : $x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot \beta)_i$. La rentabilité du portefeuille s'écrit :

$$R_P = \sum_{i=1}^{n+1} [x_i \cdot (\alpha_i + u_i)]$$

L'indice est alors effectivement un (n+1)ème titre.

Les caractéristiques du portefeuille sont :

$E(R_P) = E\left[\sum_{i=1}^{n+1} (x_i \cdot \alpha_i)\right] + E\left[\sum_{i=1}^{n+1} (x_i \cdot u_i)\right]$ mais comme $E(u_i) = 0$ le second terme est nul.

Donc $E(R_P) = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i \cdot \alpha_i)$

$\sigma^2[R_P] = \sigma^2\left[\sum_{i=1}^{n+1} (x_i \cdot \alpha_i)\right] + \sigma^2\left[\sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot u_i\right]$ mais comme les $x_i \cdot \alpha_i$ ne sont pas des variables aléatoires et ont donc une variance nulle :

Le risque du portefeuille est $\sigma^2(R_P) = \sum_{i=1}^{n+1} [x_i^2 \cdot \sigma^2(u_i)] = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i^2 \cdot Q_i)$

La matrice des covariances est réduite à sa diagonale des variances du résidu spécifique aux titres, soit les (n+1) Q_i.

ii) *Opérations sur le marché monétaire*

La possibilité d'emprunter pour investir ou de prêter une partie du capital plutôt que le placer en actions n'a pas été abordée.

On part maintenant de l'idée que le gestionnaire du portefeuille dispose d'un capital qu'il répartissait en totalité entre les actions disponibles sur le marché et un titre sans risque du marché monétaire. La frontière d'efficience change alors de nature et de forme.

L'actif financier sans risque

Les opérations sur le marché monétaire consistent à acquérir des titres de créance ou à vendre des titres de dette. Cette opération ne change pas la nature du problème précédent dans la mesure où aux titres concernés sont associés une rentabilité et un niveau de risque.

La nouveauté tient à ce que l'actif du marché monétaire est un actif sans risque. Un tel actif constitue une référence pour tous les autres placements car les écarts de rentabilité qu'ils offrent mesurent la vraie valeur du risque qu'ils représentent.

L'actif sans risque présente une rentabilité positive dont la variance est nulle. Son existence suppose :

- Que l'émetteur ne présente aucun risque de défaillance. Cette qualité n'est en général reconnue qu'à certains gouvernements.
- Qu'il n'existe pas de risque de taux, c'est-à-dire que la rentabilité du titre soit rendue indépendante de l'évolution de la structure par terme des taux d'intérêt. C'est donc nécessairement une obligation « zéro coupon ».
- Que le marché est capable d'anticipation rationnelle de l'inflation et que l'actif sans risque offre de ce fait une protection contre la perte de valeur de la monnaie.
- Que le risque de liquidité est nul et que l'actif sans risque peut être acheté ou vendu par les acteurs du marché sans restriction.

D'une manière générale les titres monétaires à trois ou six mois du Trésor dans les grands pays industriels remplissent les deux premières conditions et la dernière. En France c'est le bon du Trésor à taux fixe (BTF) à trois ou six mois. Aux Etats-Unis les *Treasury bills* à mêmes échéances. Mais seul les *Treasury bills* sont considérés comme remplissant convenablement la troisième condition. Le rôle de l'actif sans risque est essentiel dans l'explication d'un modèle d'équilibre des prix des actifs. Ce point est traité plus loin dans cette leçon.

Portefeuille prêteur (*lending portfolio*)

L'investisseur consacre une partie de son capital à l'acquisition du titre sans risque. Le reste est constitué du portefeuille d'actifs risqués.

L'actif sans risque est traité comme une $(n+2)^{ème}$ valeur dont le revenu est un taux de rentabilité certain qu'on appellera r_l, le taux prêteur. Ce taux prêteur est donc assorti d'une variance nulle et il est indépendant de l'indice I.

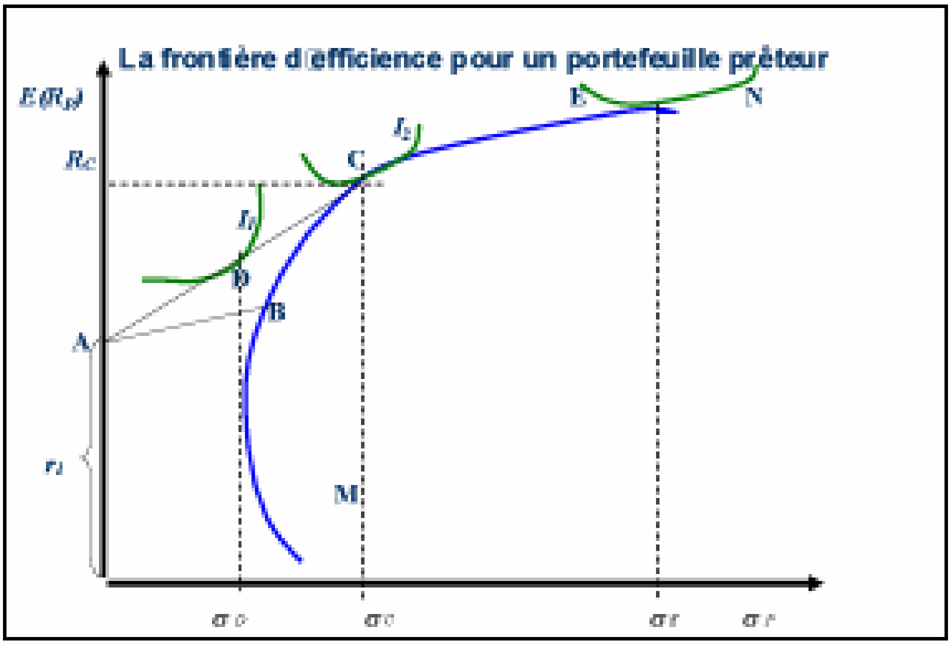
Dans les conventions précédentes, on écrit donc :

$$\alpha_{N+2} = n \ , \ \beta_{N+2} = 0 \ \text{ et } \ Q_{N+2} = 0$$

Dans l'espace $\{\sigma_P, E(R_P)\}$ l'actif sans risque est représenté par un point A (0, r_l) sur l'axe des ordonnées. Soit un point quelconque B représentatif d'un portefeuille sur la frontière d'efficience, tout point du segment de droite AB est une combinaison entre le titre sans risque et la composition du portefeuille. Partant du point A on substitue du portefeuille au titre sans risque. Plus la pente de AB est élevée, plus le risque additionnel engendré par la substitution apporte une rentabilité additionnelle élevée. La rémunération la plus élevée du risque pris est alors apportée par le segment AC qui est techniquement possible (sur la courbe d'efficience) avec la pente maximum. C'est ce que figure le schéma de l'encadré 3.

Selon l'aversion pour le risque les investisseurs ont un comportement différent.

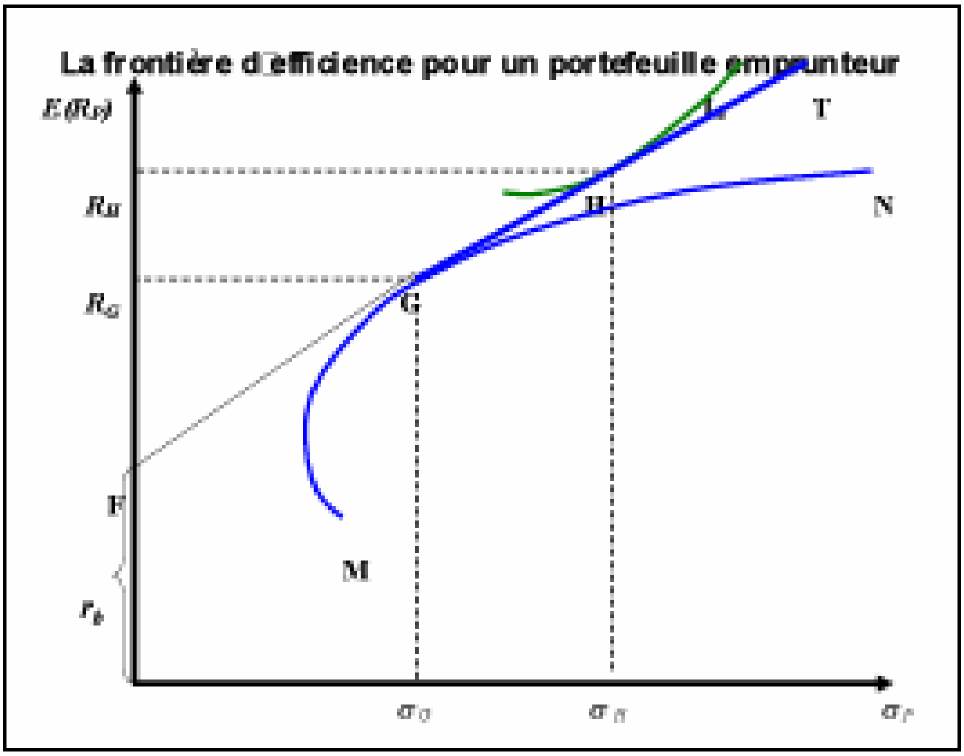
- Un investisseur refusant tout risque place la totalité du capital en titre sans risque, en A, avec la rentabilité positive mais la plus basse de $\boldsymbol{r_l}$.
- Ceux qui acceptent l'idée du risque mais on pour lui une aversion élevée (fonction d'indifférence $\boldsymbol{I_1}$) combinent le titre sans risque avec un arrangement efficient de titres à risque (sur le schéma en D). Pour eux la frontière d'efficience est le segment AC qui substitue à la partie MC de la courbe d'efficience une combinaison de rendement supérieur à risque égal.
- Quand l'aversion au risque diminue l'équilibre migre de D vers C, correspondant à un couple risque-rendement (σ_C, R_C). La part du titre sans risque se réduit progressivement puis devient nulle.
- Au-delà de C, le portefeuille cesse d'être prêteur et est entièrement constitué d'actions. La frontière d'efficience regagne la courbe MN.



Dans le cas d'un portefeuille prêteur la frontière d'efficience est ACN, composée du segment AC puis de la partie CN de la courbe d'efficience.

Portefeuille emprunteur (borrowing portfolio)

Un investisseur peut aussi s'endetter pour acquérir ou accroître un portefeuille. Il emprunte au taux r_b en espérant que le rendement du portefeuille sera supérieur à ce taux. Si c'est le cas la rentabilité différentielle du capital emprunté renforcera celle de ses propres capitaux. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet de levier.



Un investisseur doté d'une faible aversion pour le risque (représentée par la courbe d'indifférence I_3) s'endette au taux r_b avec l'espérance d'un taux de rentabilité du portefeuille R_H supérieur à celui qu'il aurait obtenu s'il n'avait investi que son capital de départ.

La frontière d'efficience pour des investisseurs acceptant le risque d'un portefeuille emprunteur (mais non prêteur) est donc MGT représentant la partie MG de la frontière d'efficience à capital fixé et la demi-droite GT.

Remarques sur les conditions de validité

Cette méthode Markovitz-Sharpe a donné lieu à de nombreux développements méthodologiques en matière de gestion de portefeuille.

Elle présente toutefois quelques difficultés d'utilisation, notamment :

- Les hypothèses sur lesquelles elle est construite et dont la vérification n'est souvent pas assurée. On citera pour exemple l'efficience des marchés ou l'existence d'un indice unique sous-jacent de la valeur des titres.
- L'existence d'un titre sans risque.
- L'instabilité des paramètres du modèle du fait d'évènements exogènes et qui obligent à revoir en permanence la composition des portefeuilles, soit quand les relations d'un titre à l'indice changent, soit encore quand le rendement et le risque spécifiques à un titre particulier font l'objet d'une information nouvelle.

Cette méthode n'en est pas moins à la base des principales techniques d'évaluation des actifs financiers dont le MEDAF est le plus connu.

C) L'EVALUATION DES TITRES

1) Le modèle du marché

A partir des travaux de Markovitz et de Sharpe de recherches conduites dans les années 1960-70 ont conduit à la «*Capital Market Theory* » actuelle. On en tracera d'abord les principes avant de présenter le MEDAF (modèle d'équilibre des actifs financiers)

i) *Dix hypothèses*

Les hypothèses pour bâtir un marché financier parfait reprennent et explicitent celles déjà énoncées par H.M. Markovitz :

- Tous les investisseurs ont un comportement rationnel. Leurs choix d'investissement se situent sur la frontière d'efficience.
- Les investisseurs sont suffisamment nombreux et leurs poids respectifs suffisamment faibles pour qu'aucun, par ses choix, ne puisse peser sur le marché.
- L'information nécessaire à l'évaluation des actifs est accessible à coût nul.
- On peut emprunter et prêter sans risque toute quantité de monnaie.
- Tous les investisseurs ont le même horizon économique.
- Tous les placements sont parfaitement divisibles et liquides.
- Tous les investisseurs assignent la même distribution de probabilités aux revenus de chaque titre (on parle de prédiction homogène ou *homogeneous expectation*).
- Il n'existe aucune restriction sur les transactions ni aucun coût de transaction.
- Le marché financier attribue un seul prix par titre à un moment donné.
- Tous les investisseurs anticipent de la même façon l'évolution des taux d'intérêt.

ii) *La droite de marché*

Dans le modèle de Sharpe, les taux de risque zéro du portefeuille prêteur et du portefeuille emprunteur étaient différents avec : $r_l < r_b$. On supposera ici que le taux sans risque R_f est le même pour l'emprunt et pour le prêt : $R_f = r_l = r_b$.

ENCADRE 1 : PORTEFEUILLE EFFICIENT

La rentabilité espérée pour l'ensemble des placements est : $E(R) = x \cdot E(R_P) + (1-x) \cdot R_f$

Et le risque se mesure par $\sigma^2 = x^2 \cdot \sigma_P^2$ **ou encore** $\sigma = x \cdot \sigma_P$

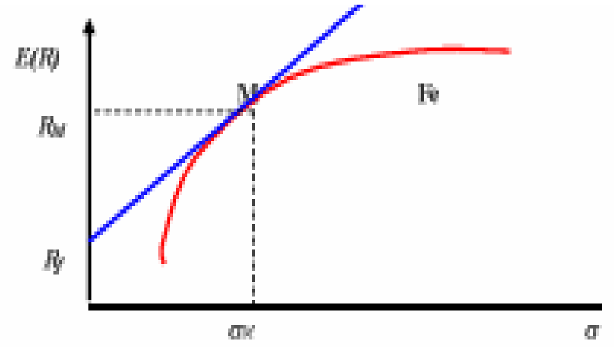
De la première relation on écrit : $E(R) - R_f = x \cdot [E(R_P) - R_f]$

Dont on élimine x **grâce à la seconde relation :** $E(R) = R_f + \sigma \cdot \frac{E(R_P) - R_f}{\sigma_P}$ **(1)**

Quand le portefeuille est efficient, il existe une relation linéaire entre la rentabilité du portefeuille et son risque total.

Sa constante est R_f **et sa pente** $\frac{E(R_P) - R_f}{\sigma_P}$ **mesure le prix du risque.**

Le portefeuille est efficient quant la pente est maximale en définissant un point sur la frontière d'efficience Fe.



On compose un placement avec un portefeuille d'actions pour une part ***x***, que l'on combine avec le titre sans risque pour une part (1-***x***).

La droite ***R$_f$*M** représente la nouvelle frontière d'efficience quand le portefeuille peut être prêteur ou emprunteur (cf. Sharpe). Elle s'appelle *Capital Market Line.*

iii) *Le portefeuille de marché*

La composition du portefeuille est alors définie en fonction de facteurs exogènes à l'investisseur : **Fe**, ***R$_f$***, qui déterminent **M** et donc ***R$_M$*** et son niveau de risque σ_M .

Tous les investisseurs, rationnels par hypothèse, constituent ce même portefeuille. Comme le marché est le résultat du comportement des investisseurs et que ces derniers composent des portefeuilles identiques, celui-ci ne peut être formé que de l'ensemble des valeurs cotées.

C'est ce qu'on appelle le portefeuille de marché.

Tout investisseur détient alors une combinaison de l'actif sans risque et du portefeuille de marché. La seule différenciation entre eux porte sur la part qu'ils accordent à chaque composante et qui ne dépend que de leur aversion au risque.

L'équation (1) de l'encadré 1 s'écrit donc $E(R)=R_f+\frac{E(R_M)-R_f}{\sigma_M}\cdot\sigma$

Le prix du risque est alors : $\frac{E(R_M)-R_f}{\sigma_M}$

2) Le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF)

A partir du modèle de Sharpe ont été développés des principes d'évaluation des actifs. Le plus connu est le MEDAF (Modèle d'évaluation des actifs financiers) ou CAPM (*Capital Asset Pricing Market*) initié en 1964-65 par Sharpe et Lintner.

i) *Prix d'équilibre d'un actif financier*

Dans la formulation précédente du modèle on peut introduire le coefficient β.

> ENCADRE 2 : LE PRIX DU RISQUE ET LE BETA
>
> En analysant par ailleurs le modèle de marché on a vu que pour un titre *i* :
>
> $E(R_i)=R_f+\beta_i\cdot[E(R_M)-R_f]$ avec $\beta_i=\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$. (2)
>
> En comparant cette relation avec la relation définissant le portefeuille de marché, on peut la réécrire : $E(R_i)=R_f+\beta_i\cdot\sigma_M\cdot\frac{E(R_M)-R_f}{\sigma_M}$
>
> On retrouve la pente de la droite $\frac{E(R_M)-R_f}{\sigma_M}$
>
> Mais la rémunération unitaire du risque est : $\beta_i\cdot\sigma_M$.
>
> Ce n'est pas le risque total de l'action mais seulement son risque systématique.

Ainsi le risque rémunéré n'est plus le risque total du titre mais son risque de marché. Les investisseurs ne sont plus rémunérés pour le risque spécifique au titre, celui qui peut être annulé par la diversification du portefeuille.

Le prix d'équilibre du marché est donc fixé par le risque de marché qui lui correspond. C'est le coefficient β qui relie le prix de l'action au risque du marché.

C'est pourquoi on utilise couramment la relation (2) de l'encadré 2 pour établir la rentabilité des actions et donc leur prix :

$$\boxed{E(R_i)=R_f+\beta_i\cdot[E(R_M)-R_f]}$$

Cette relation est au centre du MEDAF.

ii) *Six conclusions pour la stratégie de portefeuille*

Le rendement minimal d'un portefeuille est égal au taux sans risque R_f.

Pour un rendement supérieur, un investisseur doit accepter de prendre des risques. Il en obtient un rendement supplémentaire d'autant plus important que le risque pris est grand.

Le prix du risque ne dépend que du rendement moyen du marché et de sa volatilité.

Pour un niveau de risque donné le rendement le plus élevé d'un portefeuille est obtenu par la combinaison d'un actif liquide sans risque avec une combinaison d'actifs risqués reproduisant le marché.

En moyenne et sur une période assez longue, les actions étant l'actif le plus risqué elles sont aussi le plus rentable. Mais sur le court terme, leur volatilité étant plus élevée, elles peuvent engendrer des contre-performances qui sont la manifestation de leur risque plus élevé. Plus l'horizon s'allonge, plus le risque produit de la rentabilité.

Le portefeuille de marché est le seul efficient. Il en résulte qu'une gestion active est de la perte de temps et une mauvaise gestion du risque. La meilleure gestion est la gestion indicielle dans laquelle le gérant se contente de reproduire le plus fidèlement possible le marché.

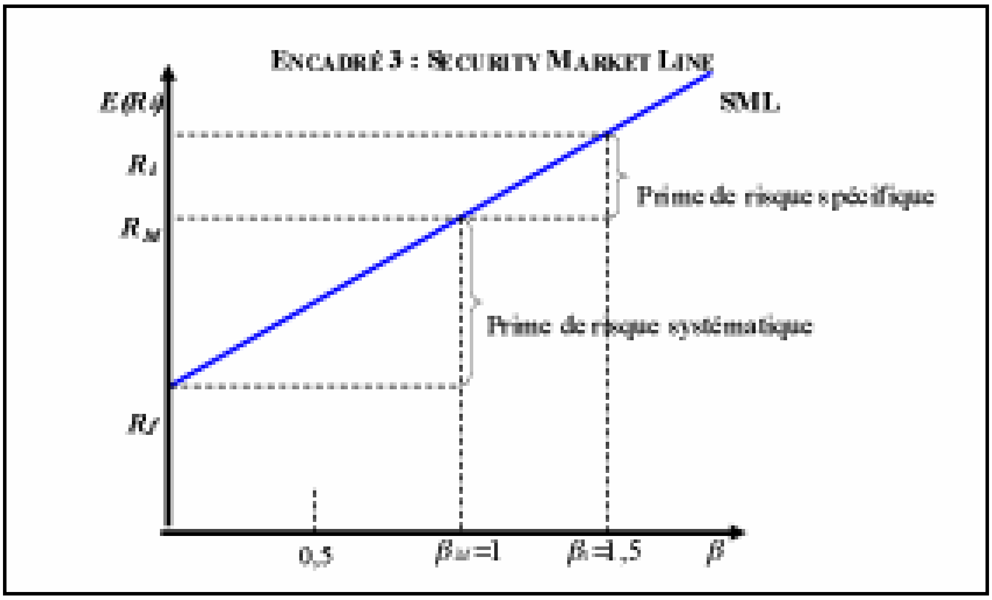
iii) *La Security Market Line (SML)*

Le MEDAF repose sur un petit changement dans la formulation précédente.

On avait jusqu'alors représenté les rentabilités espérées en fonction du risque mesuré par l'écart type. On va maintenant l'exprimer en fonction du coefficient β*.* Ce dernier était fixe, il est désormais variable. Le paramètre qui lie la rentabilité au β est la différence entre la rentabilité espérée du marché et le taux d'intérêt sans risque.

On a vu que le β mesurait la sensibilité du cours de l'action à celle du marché. Plus il est élevé en valeur absolue, plus le titre est sensible au marché. Plus il est proche de zéro, moins le titre est sensible au marché. Quand il est positif les sensibilités vont dans le même sens. S'il est négatif elles vont en sens contraires (cf. MF9_Titres&Portefeuilles).

La droite de marché qui en résulte (SML ou *Security Market Line*) n'est que la représentation graphique de l'équation (2).



La rentabilité d'équilibre est désormais fonction de la sensibilité du titre au marché. La rentabilité minimale est celle du titre sans risque.

Quand la sensibilité au marché est $\beta_M = 1$ la rentabilité espérée du titre est celle du marché. Le gestionnaire reçoit alors une prime de risque qui est celle du marché. C'est la rentabilité qu'il reçoit quand il devient détenteur d'actions à risque.

Quand la sensibilité s'accroît pour atteindre par exemple $\beta_i = 1{,}5$ le gestionnaire perçoit, en plus de la prime systématique, une prime de risque spécifique proportionnelle à la variation de la sensibilité. Cette super-prime est son espérance de gain quand il accepte le risque qu'engendre une volatilité plus forte des titres.

Par exemple, si $\boldsymbol{R_f}$ =4%, $\boldsymbol{R_M}$ =8% et $\beta_i = 1{,}5$ alors $\boldsymbol{R_i}$ = 4%+[1,5x(8%-4%)] = 10%.

iv) *Gestion de portefeuille*

En fait les gestionnaires de portefeuille ne se conforment pas systématiquement à l'indice et ne se limitent pas à une gestion indicielle. Ce serait la fin du marché ! Ils prennent position par rapport au marché en fonction d'un risque (une sensibilité) accepté.

- Quand un gestionnaire choisit les titres du portefeuille de telle sorte que $\beta_P > 1$ on dit que le *portefeuille est offensif*. Il « surperforme » le marché en cas de hausse du marché et le « sous-performe » en cas de baisse.
- Si au contraire $\beta_P < 1$ *le portefeuille est dit défensif*. Il « surperforme » le marché en cas de baisse de celui-ci et le « sous-performe » en cas de hausse.

Les gestionnaires proposent à leurs clients différentes solutions, certaines très offensives, d'autres peu offensives, d'autres encore très défensives ou peu défensives ou encore neutre. Il appartient au client, en fonction de son aversion pour le risque et de la prévision qu'il fait du marché, de choisir l'une ou l'autre formule.

L'utilisation du Bêta permet de définir l'objectif de la gestion : spéculative ou prudente, dans un marché prévu à la hausse ou à la baisse.