# Marchés financiers
# Théorie financière

## Le modèle de Sharpe

# 1. Le modèle à un indice

W. Sharpe suppose l'existence d'un indice I dont dépendent les valeurs des titres et qui crée un lien unique entre les rentabilités de ces valeurs. Ce peut être un indice de prix, de croissance, une grandeur macro-économique, le niveau d'activité sur certains marchés, etc. Cet indice est lui-même une variable exogène qu'on pose donc aléatoire.

On a donc : $R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot I + u_i$

avec : - $R_i$ le revenu du titre

- ***I*** représentant l'indice sous-jacent
- ***αi*** et ***βi*** des estimateurs spécifiques au titre ***i***
- *ui* un résidu aléatoire spécifique à *i* et donc tel que :

$$E(u_i) = 0$$

$$\sigma^2_{u_i} = \text{constante} = Q_i$$

$$\sigma_{u_i u_j} = 0 \text{ pour } \forall i,j = 1,..,n \text{ et } i \neq j.$$

L'indice I est une variable aléatoire et en a donc les propriétés :

$$I = \alpha_{n+1} + u_{n+1}$$

$$E(I) = \alpha_{n+1}$$

*[la rentabilité espérée de l'indice est donc un paramètre]*

$$\sigma^2_{u\,n+1} = \text{constante} = Q_{n+1}$$

**Dans le modèle de Sharpe, l'indice figure alors comme un titre supplémentaire, le (n+1)ème titre**

Le nuage de points représentant les couples est distribué doublement selon une loi normale :

- L'une qui résulte de l'aléa sur l'indice ***I***, soit donc : $E(I) = \alpha_{n+1}$ $\quad \sigma_{n+1} = \sqrt{Q_{n+1}}$
- L'autre, pour chaque valeur de I, soit donc : $E(R_i) = \alpha_i + \beta_i \cdot I$ $\quad \text{écart type} = \sqrt{Q_i}$

## 2. Le modèle diagonal

Soit $x_i$ la part du capital consacrée à *i*. Le revenu du portefeuille est :

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot R_i \qquad x_i \cdot R_i = x_i \cdot (\alpha_i + \beta_i \cdot I + u_i)$$

Le revenu du portefeuille a donc une double composante :

- Une composante systématique du fait que chaque titre représente un investissement dans l'indice **I**, soit *xi.βi.**I*** pour les n valeurs de i.
- Une composante spécifique venant des caractéristiques de chaque titre, soit n fois *xi.(αi+ui).*

Si l'indice est effectivement un (n+1)$^{\text{ème}}$ titre :

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot \beta)_i \qquad R_P = \sum_{i=1}^{n+1} [x_i \cdot (\alpha_i + u_i)]$$

Les caractéristiques du portefeuille sont alors :

$$E(R_P) = E\left[\sum_{i=1}^{n+1} (x_i \cdot \alpha_i)\right] + E\left[\sum_{i=1}^{n+1} (x_i \cdot u_i)\right]$$

Mais comme $E(u_i)=0$ :

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i \cdot \alpha_i)$$

$$\sigma^2[R_P] = \sigma^2\left[\sum_{i=1}^{n+1} (x_i \cdot \alpha_i)\right] + \sigma^2\left[\sum_{i=1}^{n+1} (x_i \cdot u_i)\right]$$

Comme les $x_i.\alpha_i$ ne sont pas des variables aléatoires et ont une variance nulle, le risque du portefeuille est :

$$\sigma^2(R_P) = \sum_{i=1}^{n+1} [x_i^2 \cdot \sigma^2(u_i)] = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i^2 \cdot Q_i)$$

**La matrice des covariances est réduite à sa diagonale des variances du résidu spécifique aux titres, soit les (n+1) $Q_i$. En transformant l'indice sous-jacent en titre s'ajoutant à ceux du portefeuille Sharpe rapporte l'analyse du risque de portefeuille aux seuls risques des titres pris individuellement et celle de sa rentabilité aux rentabilités distinctes des titres.**

## 3. L'actif sans risque

On est parti de l'idée que le gestionnaire du portefeuille disposait d'un capital qu'il répartissait en totalité entre les actions disponibles sur le marché. On envisage maintenant la possibilité d'emprunter pour investir ou de prêter une partie du capital plutôt que le placer en actions. Les opérations sur le marché monétaire consistent alors à acquérir des titres de créance ou à vendre des titres de dette. Cette opération ne change pas la nature du problème précédent dans la mesure où aux titres concernés sont associés une rentabilité et un niveau de risque.

**La nouveauté tient à ce que l'actif du marché monétaire est un actif sans risque**.

Un tel actif, quand il existe, constitue une référence pour tous les autres placements car les écarts de rentabilité qu'ils offrent mesurent la vraie valeur du risque qu'ils représentent.

**L'actif sans risque présente une rentabilité positive dont la variance est nulle**.
Son existence est soumise à quatre conditions :

- Que l'émetteur ne présente aucun risque de défaillance.
- Qu'il n'existe pas de risque de taux. C'est donc une obligation « zéro coupon ».
- Que le marché est capable d'anticipation rationnelle de l'inflation et que l'actif sans risque offre de ce fait une protection contre la perte de valeur de la monnaie.
- Que le risque de liquidité est nul.

D'une manière générale les titres monétaires à trois ou six mois du Trésor dans les grands pays industriels remplissent les deux premières conditions et la dernière. En France c'est le bon du Trésor à taux fixe (BTF) à trois ou six mois. Aux Etats-Unis les *Treasury bills* à mêmes échéances. Mais seuls les *Treasury bills* sont considérés comme remplissant convenablement la troisième condition.

# 4. Le portefeuille préteur

L'investisseur consacre une part de son capital à l'acquisition du titre sans risque. Le reste est constitué du portefeuille d'actifs risqués. L'actif sans risque est une (n+2)ème valeur dont le taux de rentabilité certain appelé $r_l$, taux prêteur. Ce taux a une variance nulle. Il est indépendant de l'indice ***I***. On écrit :

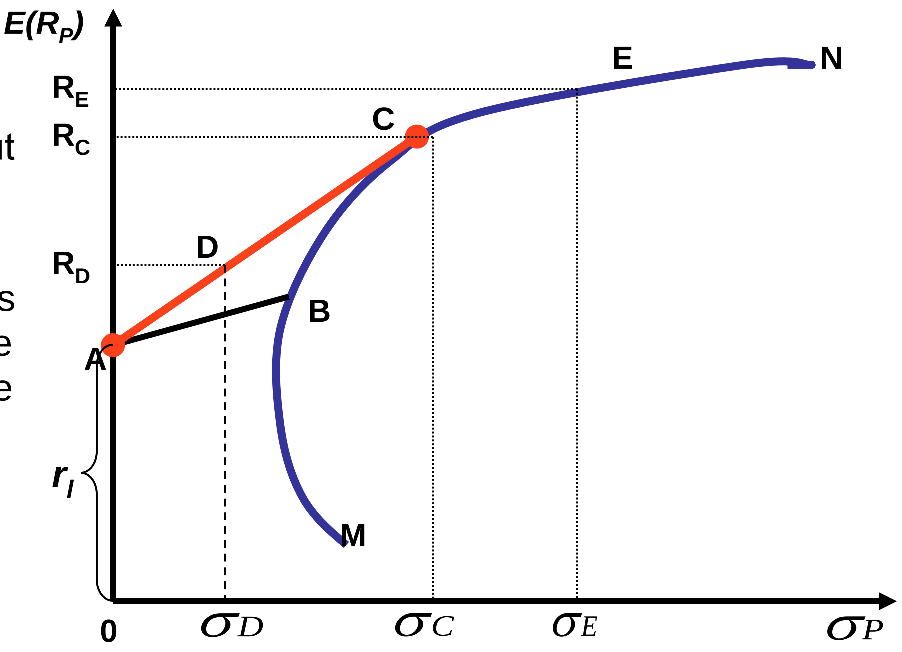
$$\alpha_{N+2}=r_l \quad , \quad \beta_{N+2}=0 \quad \text{et} \quad Q_{N+2}=0$$

L'actif sans risque est figuré par le point A (0, $r_l$).

Soit un portefeuille B sur la frontière d'efficience, tout point du segment AB est une combinaison entre le titre sans risque et la composition du portefeuille.

Partant de A on substitue du portefeuille au titre sans risque. Plus la pente de AB est élevée, plus le risque additionnel engendré par la substitution apporte une rentabilité additionnelle élevée.

La rémunération la plus élevée du risque pris est alors apportée par le segment AC qui est techniquement possible (sur la courbe d'efficience) avec la pente maximum.




Un investisseur refusant tout risque place la totalité du capital en titres monétaires (en A) avec la rentabilité la plus basse de $r_l$.. S'il accepte le risque avec une aversion élevée (en D) mais décroissante il se déplace de A vers C en substituant la combinaison efficiente d'actions au titre sans risque. Au-delà de C il cesse d'être prêteur pour être totalement constitué d'actions. MN redevient la frontière d'efficience.

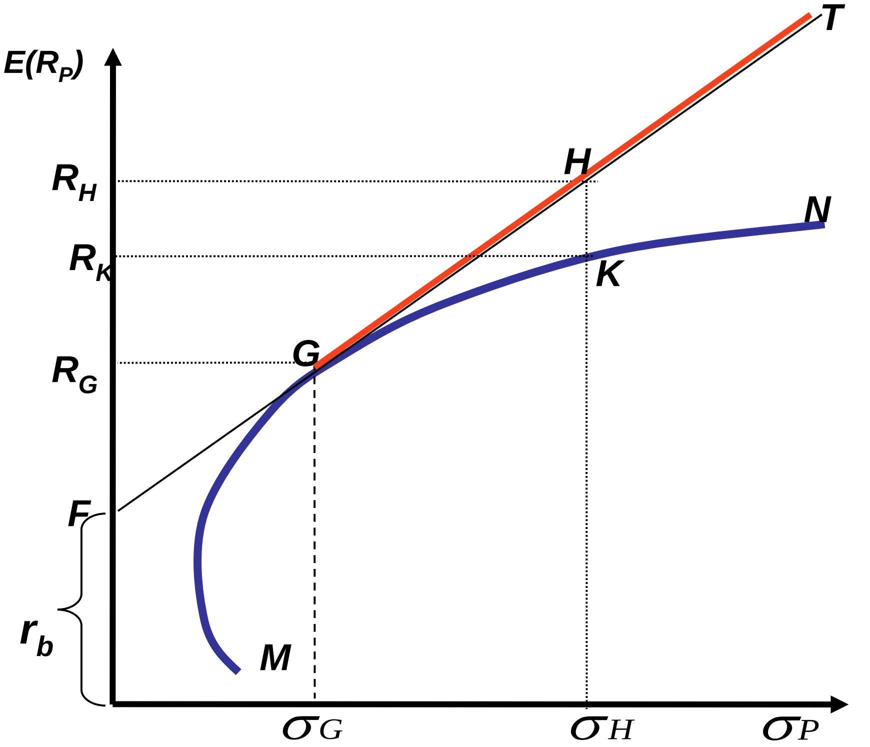
**Dans le cas d'un portefeuille prêteur la frontière d'efficience est ACN, composée du segment AC puis de la partie CN de la courbe d'efficience**

# 5. Le portefeuille emprunteur

Un investisseur peut aussi s'endetter pour acquérir ou accroître un portefeuille. Il emprunte au taux $r_b$ en espérant que le rendement du portefeuille sera supérieur à ce taux.

Si c'est le cas la rentabilité différentielle du capital emprunté renforcera celle de ses propres capitaux. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet de levier.

Un investisseur doté d'une aversion pour le risque représentée par la courbe d'indifférence $I_3$ s'endette au taux $r_b$ avec l'espérance d'un taux de rentabilité du portefeuille $R_H$ supérieur à celui obtenu s'il n'avait investi que son capital de départ $R_K$.




**La frontière d'efficience pour des investisseurs acceptant le risque d'un portefeuille emprunteur (mais non prêteur) est donc MGT représentant la partie MG de la frontière d'efficience à capital fixé et la demi-droite GT.**

La méthode Markovitz-Sharpe a donné lieu à de nombreux développements méthodologiques en matière de gestion de portefeuille. Elle présente toutefois quelques difficultés d'utilisation : la vérification des hypothèses sur lesquelles elle est construite et l'existence d'un titre sans risque ne sont pas assurées; l'instabilité des paramètres du modèle oblige à revoir en permanence la composition des portefeuilles.

Cette méthode n'en est pas moins à la base des principales techniques d'évaluation des actifs financiers dont le MEDAF est le plus connu.