Produits et marchés financiers
Les marchés d’actions

Théorie financière :
Le modèle de Markovitz

1. Les cinq hypothèses

Le raisonnement de Markovitz part de cinq hypothèses qui le rattachent à l'analyse néoclassique

Deux hypothèses sur les actifs financiers

Hyp.1 : Tout investissement est une décision prise dans un contexte de risque

Le taux de revenu (**R_i / i =1…n)** d'un actif financier est donc une variable aléatoire. On la suppose distribuée selon une loi normale définie par une espérance mathématique et une variance. Soit :

$$\overline{R}_i = E(R_i) \qquad \sigma_i^2 = \sigma_{Ri}^2 = (\sigma_{Ri})^2$$

Hyp.2 : Les revenus des titres ne sont pas indépendants les uns des autres

Les covariances entre chacun des couples de titres ne sont pas nulles, soit pour i,j=1,..,n

$$Cov(R_i, R_j) = \sigma_{ij} \neq 0 \qquad \sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \neq 0$$

Trois hypothèses sur les acteurs

Hyp.3 : Les investisseurs sont rationnels

Ils ont des préférences subjectives qu'ils savent classer. Leurs classements sont strictement transitifs et répondent aux critères de von Neumann et Morgenstern.

Hyp.4 : Les investisseurs manifestent une aversion pour le risque

Leur aversion est plus ou moins prononcée. Ils en connaissent l'importance comme une expression de leurs préférences subjectives.

Hyp.5 : Tous les investisseurs ont le même horizon de décision

Ce n'est qu'une hypothèse simplificatrice

2. L'arbitrage entre revenu et risque

- **Formulation du problème**

La décision est un problème classique d'allocation. Elle consiste pour l'investisseur à répartir un budget donné limité entre des actifs négociables sur le marché.

Soit x_i la part du budget consacrée à l'actif *i*, avec : $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

On pose en général : $0 \leq x_i \leq 1$

On peut aussi avoir :

$$\begin{cases} x_i \leq 0 & \text{si des titres sont vendus} \\ x_i > 1 & \text{si un emprunt permet d'acheter un titre au-delà de ce que le budget total permet} \end{cases}$$

Au portefeuille est associé une distribution normale des revenus caractérisée par :

Le rendement espéré :

$$\overline{R}_P = E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i)$$

Le risque :

$$\sigma_P = \sigma_{R_P} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \right]^{\frac{1}{2}}$$

2. L'arbitrage entre revenu et risque

- ## La frontière d'efficience

Markovitz trace une frontière d'efficience de la relation entre revenu et risque dans l'espace **{σ_P, *E(R*$_P$*)*}**

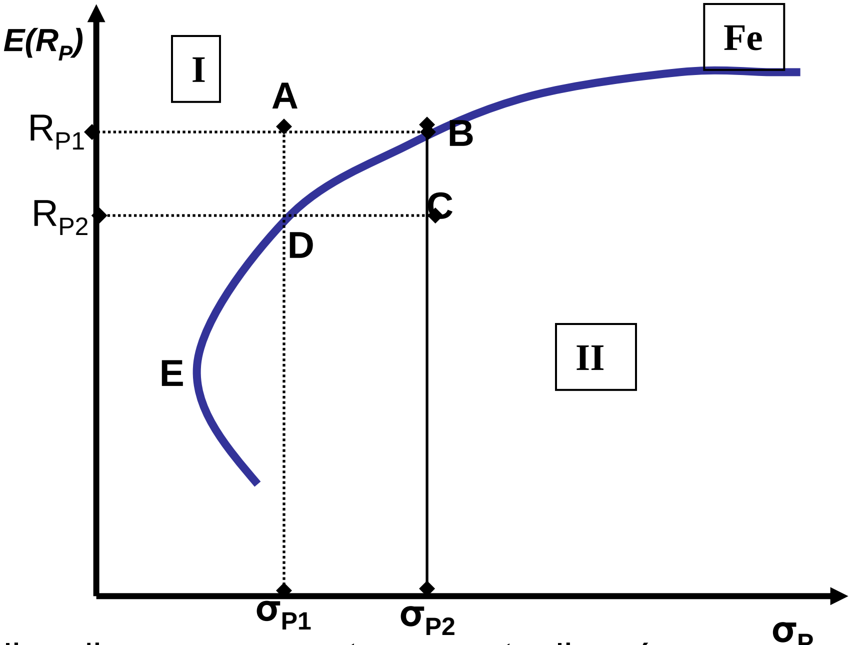
L'aversion pour le risque des investisseurs définit une courbe **Fe** appelée frontière d'efficience. Elle organise une partition de l'espace en trois parties :

Le sous espace I situé au-dessus de Fe :

En **A** le niveau de risque accepté (**σ_{P1}**) ne permet pas le taux de rentabilité attendu (R_{P1}) qui ne peut être supérieur à R_{P2} (en D) L'espérance de gain suppose un risque au moins égal à **σ_{P2}**, soit en **B**.

Le sous espace II situé en dessous de Fe :

En **C** le niveau de risque accepté permet d'espérer un taux R_{P1} supérieur au taux attendu (R_{P2}). Ce gain attendu peut être obtenu à risque moindre, soit **σ_{P1}** au point **D**.

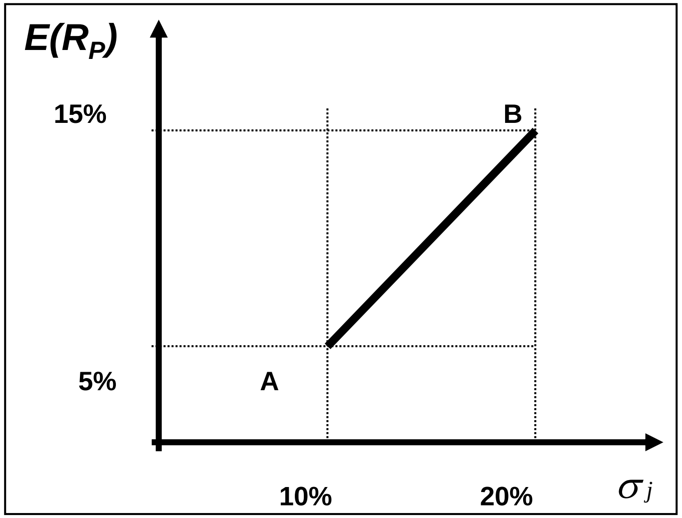


Les points **B** et **D** sont en limite d'efficience. Partant de l'un d'eux, on ne peut augmenter l'espérance de gain qu'en augmentant le risque ou réduire le risque qu'en réduisant l'espérance de gain. Tous les points de **Fe** au-delà de **E** présentent cette propriété. Ils forment la frontière d'efficience.

Sur cette frontière il n'est pas possible – dans des conditions de marché données – de modifier le portefeuille pour obtenir un gain de rentabilité sans accroître le risque ou baisser le risque sans réduire la rentabilité**. Cette frontière est indépendante des décideurs et ne dépend que du marché.**

3. La diversification de portefeuille : modèle à deux actifs

- **Cas de deux actifs corrélés positivement :** $\rho_{ij} = +1$



Soit deux actifs *i* et *j* entrant dans le portefeuille *P* en proportions *xi* et *xj*, avec *xi* et *xj≥0* et *xi,+xj=1*.
On appelle *E(Ri)* et *E(Rj)* les espérances de taux de rentabilité des deux titres et σ_i et σ_j les écarts types constatés de ces rentabilités.
On utilisera dans l'exemple les données

Actif	Rentabilité espérée	Ecart type
i	5%	10%
j	15%	20%

Le portefeuille *P* a une espérance de taux de rentabilité : $E(R_P) = 0{,}05 x_i + 0{,}15 x_j$

La variance mesurant son risque est : $\sigma_P^2 = x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + x_j^2 \cdot \sigma_j^2 + 2 \cdot x_i \cdot x_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$

On part de la situation où *xi*=1 et *xj=0*. Le portefeuille n'est pas diversifié.

Quand le coefficient de corrélation : $\rho_{ij} = 1_i$

et . $\sigma_P^2 = (x_i \sigma_i + x_j \sigma_j)^2$

Le risque et l'espérance de gain augmentent donc chacun proportionnellement à *xj*. $\sigma_P = 0{,}1 x_i + 0{,}2 x_j$

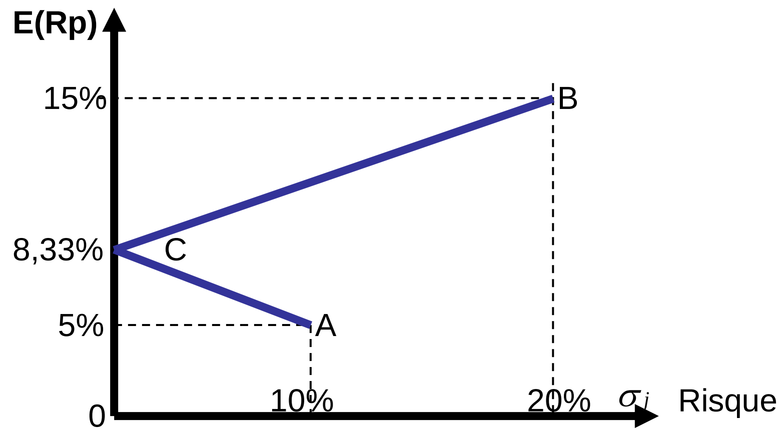
3. La diversification de portefeuille : modèle à deux actifs

- **Cas de deux actifs corrélés négativement :** $\rho_{ij} = -1$

Existe-t-il une valeur pour laquelle $\sigma_P = 0$ **et** $\sigma_P^2 = x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + x_j^2 \cdot \sigma_j^2 + 2x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{i.} \cdot \sigma_j = (x_i \cdot \sigma_i - x_j \cdot \sigma_j)^2 = 0$ **?**

Avec les valeurs numériques, $0,1 \cdot x_i - 0,2 \cdot x_j = 0$ **. Comme** ***xj = 1- xi*** **:** ***xi* = 2/3 et *xj* = 1/3.**

Quand xj croît la correspondance rentabilité risque va de A à B en passant par C de risque 0 et de rentabilité : 2/3.5% + 1/3.15% = 8,33%



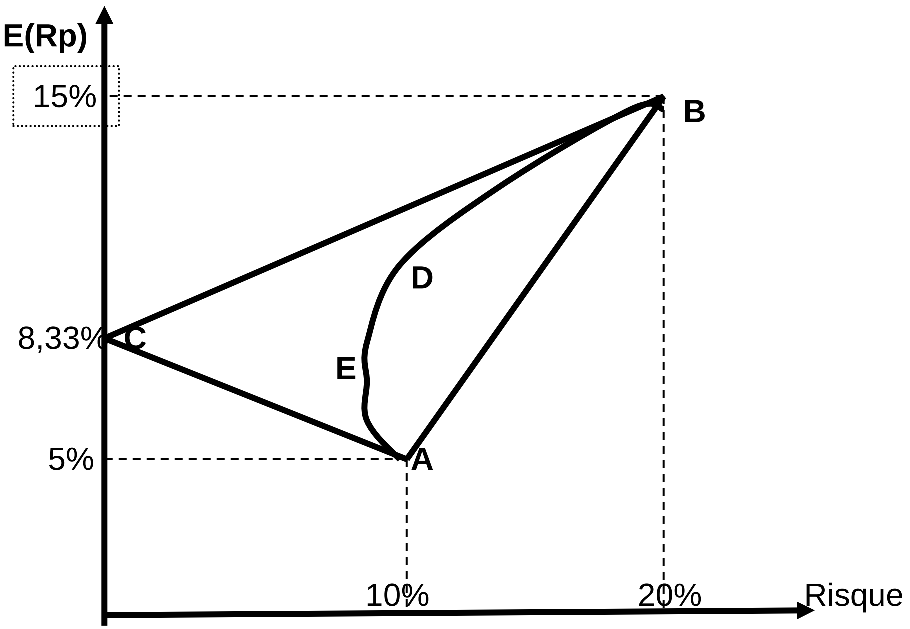
De A à C la rentabilité croît par augmentation de la part du titre à rendement élevé alors que le risque décroît grâce à la diversification. En C la diversification a produit son effet maximum. Au-delà de C son effet se réduit progressivement : risque et rendement s'accroissent ensemble.

3. La diversification de portefeuille : modèle à deux actifs

- **Cas d'une corrélation quelconque :** $-1 \leq \rho_{ij} \leq +1$ **Exemple :** $\rho_{ij} = 0$

Dans ce cas : $\sigma_P^2 = 0{,}01 \cdot x_i^2 + 0{,}04 \cdot x_j^2$ et $E(R_P) = 0{,}05 \cdot x_i + 0{,}15 \cdot x_j$

x_j	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$E(R_P)$	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%
σ_P	10%	9,2%	8,9%	9,2%	10%	11,2%	12,6%	14,3%	16,1%	18%	20%



3. La diversification de portefeuille

- **Généralisation**

Elle se construit à partir des propriétés de covariance des titres formant le portefeuille.

Il y a [n.(n-1)]/2 covariances distinctes entre les performances des titres. On appelle covariance moyenne entre les R_i des titres du portefeuille :

$$\overline{\sigma}_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sigma_{ij}}{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}$$

On pose que le montant P portefeuille est réparti entre les titres pour des sommes identiques. On pose toutes les espérance de rentabilités identiques, S_R leur somme et w_R leur moyenne :

$$R_1 = .. = R_i = .. = R_n \qquad S_R = \sum_{i=1}^{n} E(R_i) = nE(Ri) \qquad w_R = \frac{S_R}{n} = E(Rp)$$

Les variances de la somme des rentabilités et de leur moyenne sont alors :

$$\sigma_{S_R}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sigma_{ij} \qquad \sigma_P^2 = \sigma_{w_R}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sigma_{S_R}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n^2} + \frac{(n-1) \cdot \overline{\sigma}_{ij}}{n}$$

Quand n s'accroît le premier terme tend de σ_P^2 vers 0 et le second vers la covariance moyenne :

$$\text{Quand } n \to \infty \text{ alors } : \sigma_P^2 \to \overline{\sigma}_{ij}$$

le risque du portefeuille diminue avec sa diversification jusqu'à une limite inférieure qui est la covariance moyenne les titres du portefeuille dans les hypothèses de cette démonstration.

3. La diversification de portefeuille : modèle à deux actifs

- **Limites à la diversification**

Diverses études empiriques confirment la décroissance du risque avec le nombre de titres différents dans le portefeuille. Celle de B. Jacquillat & B. Solnik [2002] compare les différentes places et donne les résultats suivants pour des titres cotés au premier marché de la bourse de Paris.

Pour chaque pays étudié le risque spécifique du portefeuille tend vers 0 quand le portefeuille comporte une quinzaine de titres différents. A ce niveau la diversification de celui-ci est efficiente.

Par contre le risque systématique du marché est différent d'une place à l'autre : 27% E-U (NYSE), 34,5% au R.U., 43,8% en Allemagne, 40% en Italie, 20% en Belgique, 24,1% aux Pays-Bas et 44% en Suisse.

Le risque incompressible du portefeuille est la moyenne pondérée des paramètres **β** que la diversification n'affecte pas ni leur moyenne. Les dispersions des nuages de points autour des tendances commandée par les **β** se compensent. Le risque spécifique du portefeuille est le résultat de ces compensations. Si le portefeuille est bien diversifié son risque spécifique devient nul et seul reste le risque de marché.