INTR0DUCTION
A LA GESTION OBLIGATAIRE

Parmi les nombreux types d'obligations qui ont été présentés, les obligations à taux fixe, qui ont été les premières à circuler sur le marché financier, occupent encore aujourd'hui la place la plus importante, sur le marché primaire des émissions, comme sur le marché secondaire où interviennent les gérants de portefeuilles. Les techniques de base d'analyse de cette catégorie d'actif doivent être comprises avant d'étendre leur application aux autres types d'obligations, en particulier aux emprunts à taux variables dont le développement est très important et plus récent.

Ce module d'introduction à la gestion obligataire est essentiellement consacré aux méthodes d'analyse applicables à ces emprunts obligataires à taux fixe. Il est composé de deux parties :

- Le prix et le rendement actuariel
- La gestion du risque de taux

La première de ces deux étapes permet de comprendre l'une des spécificités de ces actifs qui concerne le lien établi entre le prix de marché de l'instrument et le taux d'intérêt auquel il correspond (on comprendra l'appellation de « marchés de taux »).

La deuxième étape conduit à la mesure du risque de taux d'intérêt, risque contrôlé par le gérant de portefeuille obligataire, et mesurable, dans sa forme la plus simple, à l'aide d'indicateurs de *duration* ou de *sensibilité*.

A) PRIX ET RENDEMENTS ACTUARIELS

Les développements qui suivent nécessitent quelques connaissances de mathématiques financières, relatives en particulier au taux d'intérêt composé et à la technique de l'actualisation. On peut consulter le module de rappels :

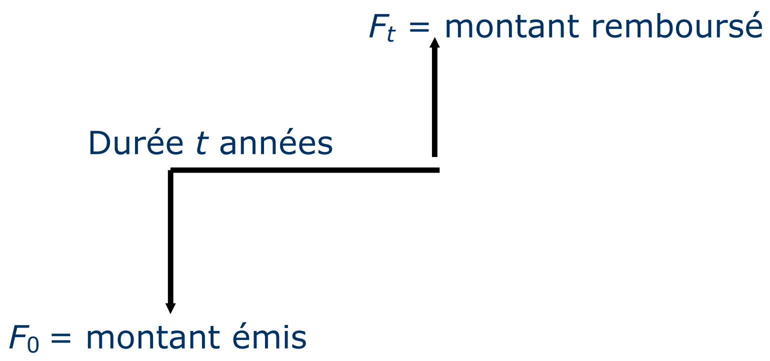
MarFin_Rappels_Actualisation

On étudie dans cette première étape, la relation entre le prix et le rendement (le taux d'intérêt effectif) dans des situations progressives, de l'emprunt zéro-coupon, le plus simple, à l'emprunt « couponné » à son émission, puis à une date quelconque de son existence. Les résultats sont généralisés à toutes les structures de flux fixes.

1) L’emprunt zéro-coupon

Un emprunt zéro-coupon ne verse, par définition, aucun intérêt entre sa date d’émission et celle de son remboursement.

Graphique 1 : L’opération élémentaire « zéro-coupon »



L’intérêt produit i est alors capitalisé jusqu’à l’échéance et le montant remboursé peut être calculé par :

$$F_t = F_0 \, (1 + i\,)^t$$

Si le montant émis est égal à 100 €, la durée égale à 2 ans et le taux d’intérêt égal à 5 %, le montant remboursé est :

$$F_t = 100 \text{ x } (1 + 0{,}05)^2 = 110{,}25 \text{ €}$$

NB : Le montant 0,25 correspond à « l’intérêt sur l’intérêt » (composé).

Supposons qu’un opérateur souhaite immédiatement négocier cet emprunt sur le marché secondaire, mais que le taux pratiqué sur ce marché soit de 6 %. Personne ne veut acquérir, au prix de 100 €, un actif qui ne rapporte que 5 % d’intérêt. Le prix négocié P doit donc baisser à un niveau tel que le véritable taux (le rendement) soit de 6 %, c’est-à-dire :

$$P = 110{,}25 \,/\, (\,1 + 0{,}06)^2$$

$$P = 98{,}12$$

Inversement, si le taux pratiqué sur le marché secondaire n’est que de 4 %, le prix négociable est supérieur au prix d’émission :

$$P = 110{,}25 \,/\, (\,1 + 0{,}04)^2$$

$$P = 101{,}93$$

La formule générale qui donne le prix de marché P en fonction du taux i, compte tenue de la durée t et du montant remboursé F_t est :

$$P = F_t \,/\, (\,1 + i\,)^t$$

Prix et taux sont inexorablement liés par une relation décroissante.

2) Un exercice

Obligations :
Transformer un instrument ordinaire en zéro-coupon

On annule les paiements intermédiaires d'intérêts par une succession d'emprunts

De sorte que chaque année :

- Au titre du remboursement et des intérêts des emprunts annuels
- On paie une somme égale aux intérêts reçus du placement

Exemple :

Soit une structure de taux

Durée	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans
Taux	6%	6,3%	6,5%	6,8%	7%

En même temps que le placement de 100.000€ à 7% on réalise 4 emprunts pour les 4 premières échéances

Qui engendrent un charge de 7.000€ chaque année

Années	Placement et revenus	4 emprunts réalisés et flux payés				Solde
		4 ans	3 ans	2 ans	1 an	
0	- 100.000	6.554	6.154	5.789	5.461	- 76.042
1	7.000	- 445	- 400	- 364	- 5.789	0
2	7.000	- 445	- 400	- 6.154		0
3	7.000	- 445	- 6.554			0
4	7.000	- 7.000				0
5	107.000					107.000

7.000€ à payer la 4ème année nécessitent un emprunt de 6.554€ qui engendrent 445€ d'intérêts chaque année : 7.000/1,068 = 6.554 et 6.554*0,068 = 445)

De même : 6.554/1,065 = 6.154 et 6.154*0,065 = 400

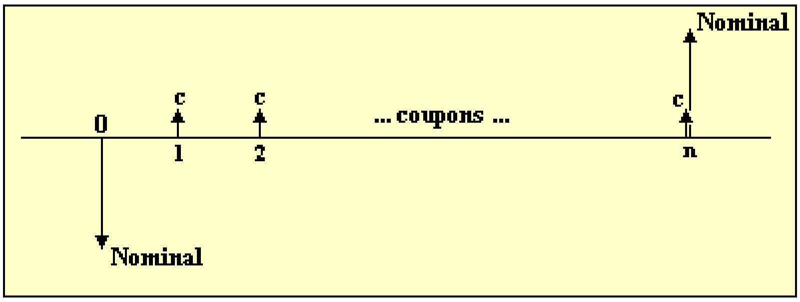
Le placement net de la première année rapporte : $\left(\frac{107.000}{76.042}\right)^{1/5} = \sqrt[5]{1,407} \Rightarrow 7,07\%$

3) L'émission d'un emprunt à coupons

Un emprunt obligataire à taux fixe permet à son détenteur (le prêteur) de percevoir périodiquement un montant d'intérêt (le coupon), pourcentage du capital prêté (le nominal), avant son remboursement, généralement effectué "in fine".

La périodicité la plus classique est l'année, mais on trouve, surtout sur le marché américain, des emprunts à coupons semestriels ou trimestriels.

Graphique 2 : L'emprunt obligataire à taux fixe



La relation entre le prix de l'emprunt sur le marché secondaire et le taux d'intérêt pratiqué sur ce marché s'exprime par une formule d'actualisation plus générale que dans le cas du zéro-coupon. Dans le cas d'un emprunt à coupon annuel, émis au pair (nominal unité) pour une durée de *n* années :

$$P = \frac{c}{1+i} + \frac{c}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1+c}{(1+i)^n}$$

Si on prend l'exemple d'un emprunt de nominal égal à 100 pour une durée de 2 ans, avec un coupon annuel de 5 % :

$$P = \frac{5}{1+i} + \frac{105}{(1+i)^2}$$

Comme dans le cas du zéro-coupon, si le taux du marché est de 6 %, le prix de l'actif sur le marché secondaire est de :

$$P = \frac{5}{1{,}06} + \frac{105}{1{,}06^2} = 98{,}17$$

Si le taux n'est que de 4 %, le prix est à nouveau supérieur au montant nominal :

$$P = \frac{5}{1{,}04} + \frac{105}{1{,}04^2} = 101{,}89$$

Bien sûr, si le taux du marché est égal à celui du coupon, l'emprunt vaut le pair :

$$P = \frac{5}{1{,}05} + \frac{105}{1{,}05^2} = 100$$

Ces relations prix-taux, mises en évidence sur cet exemple, sont valables quelle que soit la durée de l'emprunt. Elles sont généralisables pour des dates de négociation ultérieures à la date d'émission, jusqu'au remboursement final.

4) L'évolution du prix et du taux sur le marché secondaire

En réalité, l'emprunt obligataire étudié doit être considéré comme négociable en permanence, jusqu'à son échéance. Dans le cas d'un emprunt à coupons annuels, la formule d'actualisation qui relie le prix au taux sur le marché secondaire est alors :

$$P = \frac{c}{(1+i)^t} + \frac{c}{(1+i)^{t+1}} + \cdots + \frac{1+c}{(1+i)^{t+n-1}}$$

Dans cette formule *t* est la première durée, dite « brisée » entre la date de négociation (en réalité la date de règlement correspondante) et celle du prochain coupon. Cette durée, exprimée en année, est plus petite que l'unité et les durées suivantes, pour l'actualisation des autres coupons et du nominal, sont elles aussi fractionnaires. Cela correspond à une extension correcte des formules d'actualisation.

Cette relation peut s'écrire autrement, en utilisant la formule de la somme des termes d'une progression géométriques. Après quelques lignes de calcul, on trouve :

$$P = (1+i)^{1-t}\left[\frac{c}{i}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right) + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Cette formule ne contient plus de points de suspension, ce qui présente un réel avantage pour son introduction sur une calculette, un tableur ou un PDA.

Elle fait par ailleurs apparaître des résultats classiques :

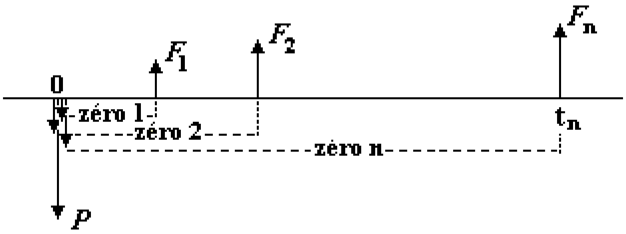
- Si $i=c$ (pour un taux actuariel égal au taux du coupon) et $t=1$ (à l'émission et après chaque tombée de coupon), $P=1$, l'obligation cote le pair. Il en résulte, en particulier, que le rendement actuariel d'un emprunt, émis au pair et remboursé au pair, est égal, le jour de l'émission, au taux du coupon.
- Si n est infini (rente perpétuelle) et $t=1$ (à l'émission et après chaque tombée de coupon), le prix est égal à c/i et le rendement actuariel est égal à c/P (revenu annuel rapporté au prix).
- Si i est constant entre deux tombées de coupon, t variant de 1 à 0, le prix s'accroît exponentiellement (de 1 à $1+i$ si le taux actuariel est le taux du coupon) et non proportionnellement comme le suppose la technique du coupon couru.

Mais l'essentiel demeure la relation décroissante entre le prix et le taux, seulement perturbée par le rôle du temps qui s'écoule. Cette relation doit maintenant faire l'objet de mesures quantitatives précises, pour en exprimer la force et aider à la gestion du risque des portefeuilles obligataires.

5) Les structures de flux fixes

Les emprunts à taux fixe ne sont pas tous des emprunts obligataires à coupons annuels. Les emprunts dits amortissables, par exemple, supposent les remboursements partiels du montant empruntés aux dates de calculs des intérêts.

Dans la structure la plus générale d'un emprunt à taux fixe, les montants reçus par le prêteur sont connus, ainsi que les dates de paiement de ces flux. Une décomposition en emprunts zéro-coupon comptants permet de reconstituer la structure initiale.



Si l'emprunt est négociable, on peut alors chercher le prix à payer pour que la structure des flux corresponde à un rendement donné.

Si l'on note :

- F_k le montant du $k$ème flux de la structure ;
- t_k la durée qui sépare la date de calcul (0) de la date de paiement de ce flux ;
- i le taux de rendement actuariel associé à la structure ;

Le montant du premier flux de ce $k$ème zéro-coupon est :

$$\frac{F_k}{(1+i)^{t_k}}$$

La somme de tous ces premiers flux, calculés avec un même rendement actuariel, est ainsi égale au prix de l'emprunt :

$$P = \frac{F_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{F_2}{(1+i)^{t_2}} + \cdots + \frac{F_k}{(1+i)^{t_n}}$$

Cette formule, établie pour calculer le prix de l'instrument en fonction du taux de rendement, peut être "lue" inversement comme donnant le taux de rendement actuariel i, en fonction du prix de marché P de l'actif.

B) DURATION ET SENSIBILITE

La dépendance du prix d'un emprunt à taux fixe vis à vis du taux d'intérêt peut être mesurée à l'aide des deux outils les plus fréquemment utilisés :

- La duration Macaulay
- La sensibilité

1) La duration Macaulay

Un premier exemple, très proche de celui qui a été utilisé dans le chapitre précédent, permet de constater que la dépendance du prix d'un zéro-coupon vis-à-vis du taux d'intérêt dépend de la durée du zéro-coupon.

Supposons qu'un investisseur achète, pour un montant de 100 euros, deux instruments zéro-coupon de maturités respectives 2 ans et 5 ans, alors que les taux sont à 5 %. Les flux fixes payés et reçus sont :

Tableau 3 : Flux payés et reçus

i = 5%	Emission	Echéance
2 ans	100,00	$100 \times (1{,}05)^2 = 110{,}25$
5 ans	100,00	$100 \times (1{,}05)^5 = 127{,}63$

Supposons qu'immédiatement après son achat, les taux passent à 6 %. Indépendamment du regret qu'il peut avoir de ne pas bénéficier de ce taux, il peut constater que, sur le marché où les autres investisseurs obtiennent du 6 %, ses emprunts zéro-coupon ne valent plus 100 euros, mais seulement :

Tableau 4 : Prix des emprunts zéro-coupon

i = 6%	Prix de marché	Echéance
2 ans	$110{,}25 / (1{,}06)^2 = 98{,}12$	110,25
5 ans	$127{,}63 / (1{,}06)^5 = 95{,}37$	127,63

On s'aperçoit ainsi que la dépendance du prix vis à vis du taux est d'autant plus forte que la durée du zéro-coupon est longue. Ce constat permet d'introduire la durée de l'instrument comme mesure de sa dépendance vis-à-vis du taux.

Pour un zéro-coupon, "duration = durée"

On peut passer directement de cet exemple très simple au cas le plus général d'une structure de flux quelconque, définie par les montants reçus F_i et les dates de perception de ces flux t_i.

Pour cet instrument quelconque, décomposable en une structure d'emprunts zéro-coupon, la duration est la moyenne pondérée des durées des emprunts zéro-coupon qui composent la structure, le coefficient de pondération étant le niveau du premier flux de chaque zéro-coupon, c'est-à-dire sa valeur actualisée.

$$D = \frac{t_1 \frac{F_1}{(1+i)^{t_1}} + t_2 \frac{F_2}{(1+i)^{t_2}} + \cdots + t_n \frac{F_n}{(1+i)^{t_n}}}{\frac{F_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{F_2}{(1+i)^{t_2}} + \cdots + \frac{F_n}{(1+i)^{t_n}}}$$

Le dénominateur de cette expression, égal à la somme des flux actualisés (les coefficients de pondération), est aussi le prix de l'emprunt, si bien que :

$$D = \frac{1}{P}\left[t_1 \frac{F_1}{(1+i)^{t_1}} + t_2 \frac{F_2}{(1+i)^{t_2}} + \cdots + t_n \frac{F_n}{(1+i)^{t_n}} \right]$$

Le principe du calcul de moyenne pondérée est généralisable à un portefeuille composé de plusieurs emprunts. La duration de chacun des instruments étant égale à la moyenne pondérée de sa structure d'emprunts zéro-coupon, la duration du portefeuille est égale à la moyenne pondérée des durations de chaque instrument (le coefficient de pondération étant la valeur actualisée de chaque emprunt).

A titre d'illustration, calculons la duration d'un emprunt obligataire émis sur 3 ans à un taux de 4 % qui correspond exactement au taux du marché. Comme cet emprunt vaut alors son nominal, supposé ici égal à 100 :

$$D = \frac{1}{100}\left[1\frac{4}{1{,}04} + 2\frac{4}{(1{,}04)^2} + 3\frac{104}{(1{,}04)^3} \right] = 2{,}886 \text{ ans}$$

L'unité est bien l'année et la duration apparaît comme la durée d'un zéro-coupon qui se « comporterait » comme l'emprunt obligataire vis à vis du taux d'intérêt (cette interprétation est précisée dans le chapitre suivant).

2) La sensibilité

L'outil mathématique adapté à l'analyse comparée des variations d'une fonction (le prix) et de sa variable (le taux) est la dérivée. Celle-ci mesure la limite du rapport des accroissements respectifs dP/di lorsque $di \to 0$, calcul applicable à des variations faibles du taux, par exemple 0,01 % (un "point de base").

Il est préférable ici, cependant, de raisonner en variation relative du prix (en pourcentage), rapportée à une variation absolue du taux i (qui est lui-même un pourcentage). En corrigeant le signe négatif de la dérivée, on définit ainsi la sensibilité S par :

$$S = -\frac{1}{P}\frac{dP}{di}$$

La sensibilité mesure la baisse, en pourcentage, du prix, par rapport à une hausse faible du taux. Une sensibilité égale à 7 indique, par exemple, que le prix baisse de 0,07 % pour une hausse du taux de 0,01 %.

Le calcul de la dérivée du prix, à partir de la fonction (1) du § 2.3., puis de la sensibilité, conduit à retrouver, à un coefficient (1+ *i*) près, la mesure de la duration. En effet :

$$\frac{dP}{di} = -t_1 \frac{F_1}{(1+i)^{t_1+1}} - t_2 \frac{F_1}{(1+i)^{t_2+1}} - \cdots - t_n \frac{F_n}{(1+i)^{t_n+1}}$$

Et

$$S = -\frac{1}{P}\frac{dP}{di} = \frac{1}{P}\left[t_1 \frac{F_1}{(1+i)^{t_1+1}} + t_2 \frac{F_2}{(1+i)^{t_2+1}} + \cdots + t_n \frac{F_n}{(1+i)^{t_n+1}}\right]$$

Le rapprochement avec la duration Macaulay est immédiat et on déduit :

$$D = S(1+i) = -\frac{(1+i)}{P}\frac{dP}{di}$$

Comme *di* est aussi *d*(1+*i*), on peut écrire encore :

$$D = -\frac{\frac{dP}{P}}{\frac{d(1+i)}{1+i}}$$

Cette deuxième version de la duration la fait ainsi apparaître comme une élasticité du prix par rapport au coefficient de capitalisation (1+*i*). Elle mesure la variation du prix, en pourcentage, lorsque le coefficient de capitalisation varie de 1 %.

On peut appliquer numériquement la formule du calcul de la sensibilité au cas du chapitre précédent de l'emprunt obligataire émis au pair sur 3 ans au taux de 4 %.

S = D / (1 + i) = 2, 886 / 1,04 = 2,775

Si le taux d'intérêt s'élève d'un point de base (0,01 %) le prix de l'obligation baisse 2,775 fois plus, c'est-à-dire de 0,02775 %.

3) Un exercice

EXERCICE SUR LA DURATION

Soit une obligation de 1.000€ de 5 ans, remboursable *in fine,* à 6% de coupon annuel payable en fin d'exercice

Taux d'actualisation		i= 4%		i= 3%		i= 5%		i= 0%	
t	Ft	Vo(Ft)	t*Vo(Ft)	Vo(Ft)	t*Vo(Ft)	Vo(Ft)	t*Vo(Ft)	Vo(Ft)	t*Vo(Ft)
1	60	57,69	57,69	58,25	58,25	57,14	57,14	60,00	60,00
2	60	55,47	110,95	56,56	113,11	54,42	108,84	60,00	120,00
3	60	53,34	160,02	54,91	164,73	51,83	155,49	60,00	180,00
4	60	51,29	205,15	53,31	213,24	49,36	197,45	60,00	240,00
5	1060	871,24	4356,21	914,37	4571,83	830,54	4152,69	1060,00	5300,00
Somme		1089,04	4890,03	1137,39	5121,15	1043,29	4671,61	1300,00	5900,00
Duration			4,49		4,50		4,48		4,54
Sensibilité			-4,32		-4,37		-4,26		-4,54