TAUX D'INTERET ET RENDEMENT D'UN PRET

Plan :

A) Généralités sur les taux d'intérêt
B) Typologies selon les flux de paiements
C) Intérêts simples et composés
D) Conventions de durée
E) Conversions de taux

A) GENERALITES SUR LES TAUX D'INTERET

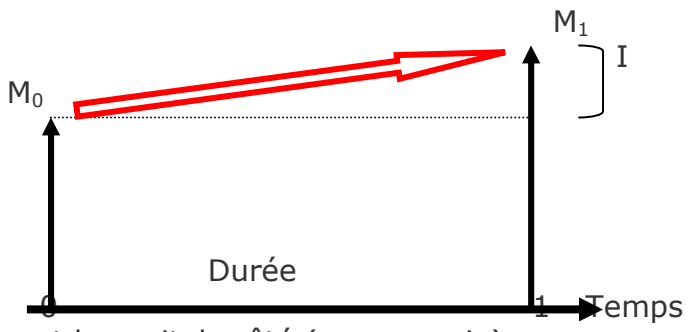
1) Structure d'une opération de prêt

Une opération simple de prêt comporte au moins deux des trois ensembles de dispositions suivantes :

- Le montant nominal du prêt, c'est-à-dire la somme transférée initialement du créancier au débiteur ainsi que les échéanciers de versement.
- Le montant du remboursement à effectuer et la ou les dates auxquelles ce remboursement s'effectuera.
- La rémunération du prêteur, appelée intérêt parce qu'elle correspond à ce qui est entre ce qu'il a prêté et emprunté.

Exemple1 : Structure simplifiée d'une opération de prêt

Le cas le plus simple est le suivant. Le prêteur P livre une somme M_0 à la date 0 à un emprunteur E qui s'engage à lui rembourser $M_1 > M_0$ un an après à la date 1.



- M_0 est le capital prêté (en monnaie),
- M_t est le montant total des remboursements (capital et intérêt),
- $I = M_t - M_0$ est l'intérêt reçu,
- $i = I / M_0$ est le taux d'intérêt.

On note que le calcul de l'intérêt peut être obtenu de deux façons :

- M_0 et M_1 sont fixés conventionnellement et $i = (M_1 - M_0)/ M_0$.
- M_0 et i sont fixés conventionnellement et $M_1 = (1 + i)* M_0$

2) Le temps dans les opérations de prêt

Par rapport à cette structure de référence des variantes peuvent être introduites qui tiennent en général au calendrier des opérations. Elles conduisent à différencier les taux affichés de l'opération de ceux qui en représentent la rentabilité.

i) *La durée inférieure ou supérieure à l'année.*

Les prêts peuvent être consentis pour des durées allant d'une journée à plusieurs décennies : 30, 40 ans parfois et même l'infini pour des titres de dette perpétuelle !

La convention est que les taux d'intérêt sont exprimés pour des durées de référence annuelles. Les conventions de durée (cf. infra) rapportent l'intérêt dû pour une durée donnée à un taux exprimé pour une durée de référence annuelle.

ii) *Le versement échelonné du capital prêté*

Une même opération de prêt peut donner lieu à des versements échelonnés du capital prêté. Le versement peuvent être selon les cas réalisés à des dates préfixées – le 5 de chaque mois par exemple – ou commandés par les besoins de financement de l'emprunteur – des paiements à effectuer.

Les conventions d'intérêt peuvent donc varier pour tenir compte des obligations qui en résultent pour le prêteur et l'emprunteur. Mais *le calcul de rendement du prêt doit tenir compte de la date du versement effectif des fonds* et de la durée effective de mise prêt qui en résulte.

iii) *Le remboursement échelonné du capital prêté*

On a supposé le remboursement de la totalité du capital prêté en une fois à l'échéance de l'opération (*in fine*). La convention peut prévoir un remboursement échelonné, soit à des dates préétablies, soit à l'initiative d'une des parties. On parle alors d'amortissement progressif de la dette. *Le calcul de rendement du prêt doit tenir compte des dates de remboursement effectif des fonds* et de la durée effective de mise prêt qui en résulte.

3) Le calendrier du paiement des intérêts

Pour les prêts à très court terme (moins de 6 mois ou un an) les intérêts sont en général versés en une fois :

- Le plus souvent à la fin de l'opération. Ils s'ajoutent alors au capital remboursé (intérêts payables à l'échéance)
- Parfois à son début. Ils se déduisent alors du capital à verser (intérêts payables à l'avance).

Pour les prêts à durée plus longue, et presque toujours à partir de deux années, l'intérêt est versé en plusieurs échéances selon un calendrier préétabli : versements mensuels, trimestriels, semestriels ou le plus souvent annuels.

Le temps s'écoulant continûment, les intérêts d'un capital prêté en début de période devrait pouvoir être comptabilisés également en continu. On les appelle *les intérêts courus non échus*.

Si les intérêts sont payés en fin d'une période, cela signifie que les intérêts accumulés au cours de la période et payés à l'issue de celle-ci constituent un prêt supplémentaire s'ajoutant au capital.

Le calcul du rendement du prêt doit donc prendre en compte les échéanciers du versement puis du remboursement du capital ainsi que celui du paiement des intérêts. C'est ce que visent les concepts de rendement actuariel et de rendement continu ainsi que les taux actuariel et continu qui les mesurent.

B) TYPOLOGIE DE PRETS ET FLUX DE REMBOURSEMENT

Les conventions possibles concernant les calendriers respectifs de l'amortissement du capital et du paiement de l'intérêt sont très variées. Des variantes existent qui ont pour résultat de moduler dans le temps le flux le revenu entre l'émetteur et le souscripteur.

1) Amortissement in fine paiement périodique des intérêts

Le modèle classique est celui du remboursement total à maturité (à l'échéance), et d'intérêts versés périodiquement.

Dans l'encadré 2 l'intérêt est payé chaque année (souvent en fin de période) et représente 5% de la somme due en début de période. Le capital est remboursé d'un coup en fin de dernière année.

Exemple 2 : un prêt – Amortissement in fine, intérêts annuels

Flux d'un prêt de 10.000€ à 5 ans à 5% d'intérêt (taux monétaire) payé annuellement

Années	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	TOTAL
Amortissement	0	0	0	0	10.000,00	10.000,00
Intérêt	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	2.500,00
TOTAL	500,00	500,00	500,00	500,00	10.500,00	12.500,00

2) Amortissement périodique constant

Le capital est remboursé à chaque exercice par fractions constantes (encadré 3).

Exemple 3 : un prêt à amortissement annuel à taux constant

Flux d'un prêt de 10.000€ à 5 ans à 5% d'intérêt (taux monétaire) payé annuellement

Années	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	TOTAL
Amortissement	2.000,00	2.000,00	2.000,00	2.000,00	2.000,00	10.000,00
Intérêt	500,00	400,00	300,00	200,00	100,00	1.500,00
TOTAL	2.500,00	2.400,00	2.300,00	2.200,00	2.100,00	11.500,00

3) Amortissement par annuités constantes de charge.

La charge de la dette est constante. L'amortissement est réalisé progressivement et l'intérêt est calculé chaque année sur la dette restante en début d'exercice. L'encadré 4 en donne le principe de calcul et l'encadré 5 en propose un exemple.

Exemple 4 : Calcul d'amortissement et d'intérêt d'un prêt à charge annuelle de la dette constante

Si d est le nombre d'années, $t = 1,..d$ une année, M_0 le nominal emprunté, i le taux d'intérêt monétaire, A_t et I_t l'amortissement du capital et les intérêts dus à l'année t, C la charge annuelle de la dette.

La charge d'intérêt d'une année t est :

$$I_1 = i \times M_0 \quad \text{et} \quad I_t = i \times \left(M_0 - \sum_{j=1}^{t-1} A_j \right)$$

Pour chaque année t la charge de la dette C_t est :

$$C_t = A_t + i \times \left(M_0 - \sum_{j=1}^{t-1} A_j \right) = C \text{, dont on déduit : } A_t = (1+i) \times A_{t-1}$$

$$M_O = \sum_{t=1}^{d} A_t = A_1 \times \left(\sum_{t=1}^{d} (1+i)^{t-1} \right) \text{ et donc : } A_1 = \frac{M_O}{\sum_{t=1}^{d} (1+i)^{t-1}}$$

Dont on déduit les valeurs de A_2, A_3 … A_d.

On calcule ensuite les valeurs de I_1, I_2 … I_d puis la valeur de l'annuité C.

Exemple 5 : un prêt à charge annuelle de la dette constante

Flux d'un prêt de 10.000€ à 5 ans à 5% d'intérêt (taux monétaire) payé annuellement

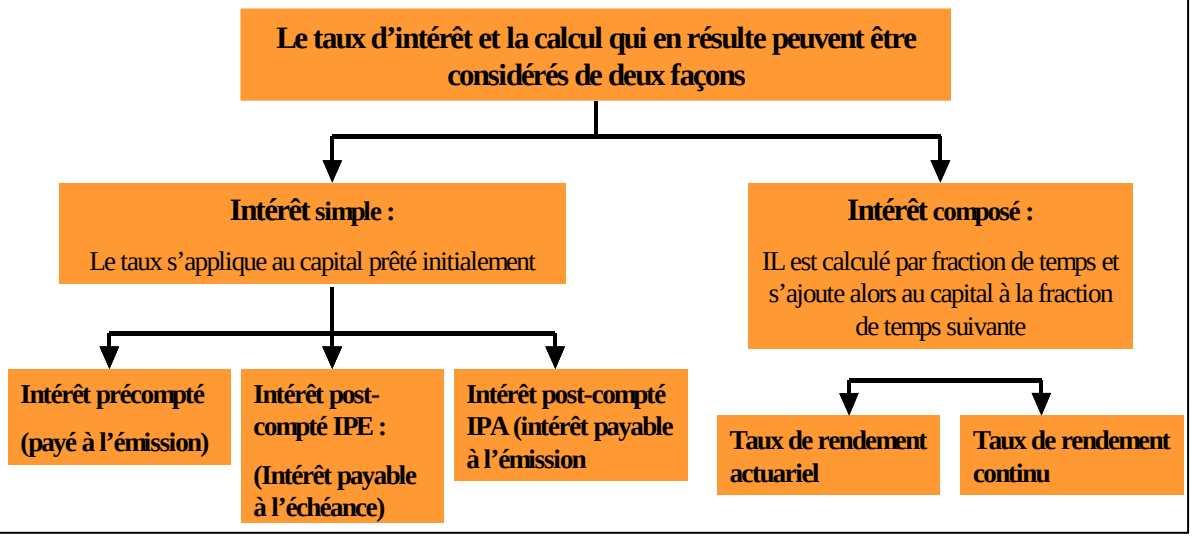
Années	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	TOTAL
Amortissement	1.809,75	1.900,25	1.995,25	2.095,00	2.199,75	10.000,00
Intérêt	500,00	409,50	314,50	214,75	110,00	1.548,75
TOTAL	2.309,75	2.309,75	2.309,75	2.309,75	2.309,75	11.548,75

C)INTERETS SIMPLES ET COMPOSES

Dans les exemples précédents le calcul des intérêts se fait en temps discret. Le capital est prêté pour une durée continue mais le taux d'intérêt ne tient pas compte de cet écoulement du temps. Les intérêts dus au titre d'une année ont été constitués jour après jour au cours de cette année. Or s'ils sont payés en fin d'année le temps écoulé entre leur constitution et leur versement ne donne pas lieu à rémunération.

La distinction entre l'intérêt simple et l'intérêt composé permet de tenir compte de cette accumulation intermédiaire des intérêts. Elle permet de construire la typologie des taux que propose l'encadré 6.

Encadré 6 : Intérêts simples et composés
Rémunération et rendement



1) L'intérêt simple

Il permet le calcul direct du revenu annuel d'intérêt à partir du capital prêté. Les trois variantes proposées correspondent à différentes dates de versement de ces intérêts :

- L'intérêt post-compté IPE (payable à l'échéance) est payé à la date du remboursement. Il est calculé à partir de la valeur nominale du capital et s'ajoute au remboursement au profit du prêteur.
- L'intérêt précompté se calcule comme le précédent mais est payé à l'émission et réduit le versement opéré par le prêteur.
- Les intérêts post-comptés IPA sont payés à l'avance mais cette fois c'est le flux initial qui sert de base au calcul de l'intérêt.

L'encadré 7 donne des exemples de calcul de l'intérêt simple.

Application 7 : Flux de paiements d'un prêt à intérêt simple selon la date du paiement *On retient l'exemple d'un prêt de 10.000€ consenti pour un an à 5%.*			
Opérations du prêteur	**Intérêt post-compté IPE**	**Intérêt précompté**	**Intérêt post-compté IPA**
Début de l'exercice	**Prête M0 soit 10.000€**	**Prête M0 - *i* M0 Soit 10.000*(1-0,05) = 9.500€**	**Prête M0 = Mt - *I*m0 Soit M0 = 10.000/(1+0,05) M0 = 95.238€**
Fin de l'exercice	**Reçoit Mt = M0 + *i*M0 Soit 10.000*(1+0,05) = 10.500€**	**Reçoit Mt = M0 soit 10.000€**	**Reçoit Mt = 10.000€ Correspondant à M0 + *i*M0**

2) L'intérêt composé

On s'intéressera ici à l'intérêt composé dans la mesure où il permet une meilleure appréciation des rendements des prêts et leur comparaison.

On parle d'intérêt composé pour indiquer que les intérêts sont capitalisés à chaque période.

Application 8 : Définition de l'intérêt composé

Dans ce cas, si le flux final est M_t, le flux initial M_0 , la durée t :

$$M_t = M_0 \times A^t$$

Si on décompose t en sous périodes telles par exemple que $t = t_1 + t_2 + t_3$:

$$M_t = \left(\left(M_0 \times A^{t_1}\right) \times A^{t_2}\right) \times A^{t_3}$$

Si à chaque sous période t_i est appliqué un taux A_i :

$$M_t = M_0 \times A_1^{t_1} \times A_2^{t_2} \times \ldots \times A_n^{t_n} = M_0 \prod_{i=1}^{n} A_i^{t_i}$$

Le résultat de t_1 est bien capitalisé en t_2 et celui de t_2 capitalisé en t_3. Les variantes résultent du découpage en périodes.

i) *Le taux actuariel (TA ou i_A)*

C'est un taux d'intérêt composé, unique sur la période d'un prêt, défini sur une durée annuelle et sur une base « exact/exact ».

L'intérêt est calculé en fonction d'une durée exacte (en nombre de jours par exemple) et une année est comptabilisée pour 365 ou de 366 jours (cf. infra les conventions de durée).

Le taux actuariel trouve trois types d'applications illustrées dans l'encadré 9 :

- Il permet de calculer la valeur d'un prêt à un moment donné quand les intérêts ont été capitalisés (calcul de capitalisation).
- Symétriquement il permet d'établir la valeur actuelle d'une somme future (un flux de remboursement par exemple).
- Enfin il permet d'établir une référence pour le rendement d'un prêt et de comparer les rendements d'opérations différentes et de placements alternatifs.

Application 9 : Rendement, capitalisation, valorisation –taux actuariel			
Calcul de…	**Formule générale**	**Exemple (données)**	**Résultat**
… Capitalisation	$M_t = M_0 \times (1+i_A)^t$	M_0=10.000 € i_A=5% t=10 ans	M_t=16.288,95 €
… Actualisation	$M_0 = \frac{M_t}{(1+i_A)^t}$	M_t=15.000 € i_A=5% t=10 ans	M_0=9.208 €
… Rendement	$i_A = \left(\frac{M_t}{M_0}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$	M_0=10.000 € M_t=15.000 € t=10 ans	i_A=4,138%

La comptabilisation actuarielle des intérêts accroît le flux final pour un taux d'intérêt donné ou, ce qui revient au même réduit le montant du prêt initial qui conduit à un flux final donné. Elle évalue le rendement effectif de l'opération à 4,138%, soit 67 point de base en dessous du taux facial de 5%.

ii) *Le taux continu (TC ou i_c)*

C'est le taux actuariel qui s'appliquerait si au lieu de l'année on retenait des périodes de capitalisation infinitésimales : le calcul et la capitalisation des intérêts s'effectuent alors en continu. Comme précédemment il permet des calculs de capitalisation, de valorisation et de rendement.

La comptabilisation en continu des intérêts accroît encore le flux final pour un taux d'intérêt donné ou le montant du prêt initial qui conduit à un flux final donné. Elle évalue le rendement effectif de l'opération à 4,055%, soit presque 1% de moins que le taux facial de 5% et 8 point de base sous le taux actuariel.

Application 10 : Rendement, capitalisation, calorisation Cas du taux continu			
Calcul de…	**Formule générale**	**Exercice d'application**	**Résultat**
… Capitalisation	$M_t = M_0 \times e^{i_c t}$	M_0=10.000 € I_c=5% t=10 ans	M_t=16.487,21 €
… Actualisation	$M_0 = M_t \times e^{-i_c t}$	M_t=15.000 € I_c=5% t=10 ans	M_0=9.097,96 €
… Rendement	$i_c = \frac{1}{t} \times \ln\left(\frac{M_t}{M_0}\right)$	M_0=10.000 € M_t=15.000 € t=10 ans	i_c=4,055%

D) LES CONVENTIONS DE DUREE

Elles tiennent soit aux dates de réalisation des opérations, soit à la durée des périodes de calcul des intérêts.

1) La date de début d'une opération

Une opération ne commence pas toujours à l'instant de la signature du contrat qui l'organise. Par contre ce contrat prévoit les dates d'effet du prêt, et notamment cette de la mise du capital à la disposition de l'emprunteur. Ce peut être une date définie (le 31 janvier 2002 par exemple) ou une date définie par celle de la transaction. Si J est le jour de la transaction : J+1, J+2, J+3, le premier jour du mois suivant ou le jour ouvré qui suit immédiatement s'il s'agit d'un jour férié, etc.

Pour l'achèvement d'une opération, la convention peut soit prévoir une date précise (le 31 juillet 2002 par exemple) ou une durée (par exemple 6 mois). Si l'achèvement de cette durée correspond à un jour férié le contrat peut prévoir l'achèvement au jour ouvré suivant, ou précédent, ou d'autres dispositions pour une date proche.

2) Les conventions de mesure du temps (dites « de base »)

Elles comportent deux types de dispositions tenant à la durée des périodes (année, mois) et aux dates qui ponctuent les opérations et aux durées qu'elles définissent.

i) *Les unités de périodes*

L'année peut être comptabilisée sur trois durées exprimées en nombre de jours.

- ✓ 360 jours soit 12 mois de 30 jours. On parle alors de convention « 30 ».
- ✓ 365 jours même les années bissextiles.
- ✓ Le nombre exact de jours, soit 365 ou 366 jours. C'est la convention « exact » (ou nje).
- ✓ La convention « ACT » peut être retenue dans le cas d'un paiement du coupon en plusieurs versements également espacés dans l'année. S'il y a *n* versements et que la durée (exacte en nombre de jours) entre deux versements est *D*, la durée de l'année est réputée être *A=nxD*.

Selon la convention de période retenue, la durée d'une opération (un prêt) en nombre de jours sera calculée différemment.

- Dans le cas d'une convention de période « exact » (ou nje ou ACT) c'est le nombre exact de jours qui s'écoule entre la date de début et celle de la fin d'un comptage (de prêt, d'intérêt, etc.).
- Dans le cas s'une convention de période « E » la durée s'établit selon la formule :

  $D = (A_2 - A_1)x360 + (M_2 - M_1)x30 + (J_2 - J_1)$.

  Avec les conventions suivantes :

  - o Si $J_1=31$ alors $J_1=30$;
  - o Si $J_2=31$ et $J_1=30$ alors $J_2=30$.

ii) *Les dates et durées*

La variable de durée des encadrés 8, 9 et 10 se calcule comme : ***t = d/A***, soit comme le rapport de la durée étudiée à celle d'une année.

Les deux termes du rapport peuvent se mesurer selon les conventions précédentes. L'encadré 11 en donne un exemple.

Application 11 : Exemples de calcul d'une durée entre deux dates - Convention « E »					
Dates du prêt	**$(A_2 - A_1)*360$**	**$(M_2 - M_1)*30$**	**$(J_2 - J_1)$**	**Durée (jours)**	**Durée (ans)**
10/09/03 au 25/12/05	**(5-3)*360 =720**	**(12-9)*30=90**	**25-10=15**	**720+90+15 =825**	**825/360 =2,29**
30/04/05 au 31/07/05	**0**	**(7-4)*30=90**	**0-0=0**	**90**	**0,25**
31/05/03 au 31/08/03	**0**	**90**	**0**	**90**	**0,25**
20/11/05 au 10/03/06	**(6-5)*360 =360**	**(3-11)*30 =-240**	**10-20=-10**	**360-240-10=110**	**110/360 =0,31**
31/12/04 au 28/02/05	**(5-4)*360 =360**	**(2-12)*30= -300**	**0**	**60**	**0,17**

Les fractions d'année sont calculées comme A/n avec n=2 pour le semestre et n=4 pour le trimestre.

- Pour la convention « E » : semestre de 360/2=180 et trimestre=360/4=90.
- Pour la convention « exact » : semestre de 365/2 ou 366/2 et trimestre de 365/4 ou 366/4.

Application 12 : Durée restant pour les intérêts d'un prêt Exemple de calcul des intérêts courus non échus d'un prêt dont le prochain coupon annuel est dû au 01/12/02 (en % du taux d'intérêt)			
Convention	Au 30/10/02	Au 31/10/02	Au 1er /11/02
360/360	300/360ème	300/360ème	301/360ème
Exact/360	303/360ème	304/360ème	305/360ème
Exact/Exact	303/365ème	304/365ème	305/365ème

E) LES CONVERSIONS DE TAUX

Elles ont pour objet de passer d'un taux monétaire à un taux de rendement ou d'établir le taux monétaire qui permet d'obtenir un rendement donné.

1) D'un taux simple (monétaire) à un taux actuariel.

Quel est l'équivalent actuariel i_A d'un taux simple i ? Ou encore quelle est la relation entre les taux monétaire et actuariel qui passent d'un montant initial M_0 à un montant final (capital et intérêt) M_1 ? L'encadré 13 en établit la formule de calcul et l'illustre par un exemple.

Application 13 : Du taux monétaire au taux actuariel

Soit un prêt à intérêt post-compté *i*, consenti pour une durée exacte *d*. L'application du taux monétaire donne :

$$M_1 = M_0 \times \left(1 + i \times \frac{d}{360}\right)$$

Celle du taux actuariel :

$$M_1 = M_0 \times (1 + i_A)^{\frac{d}{365}}$$

On a donc :

$$(1 + i_A)^{\frac{d}{365}} = \left(1 + i \times \frac{d}{360}\right)$$

Le taux qui mesure le rendement actuariel d'un prêt à taux monétaire *i* de maturité *d* est donc :

$$i_A = \left(1 + i \times \frac{d}{360}\right)^{\frac{365}{d}} - 1$$

Si *i*=5% et *d*=92 jours, i_A=5,17%.

Symétriquement le taux monétaire requis pour obtenir un rendement actuariel donné se calcule par :

$$i = \frac{360}{d}\left[(i_A + 1)^{\frac{d}{365}} - 1\right]$$

2) Du taux monétaire au taux continu

Quel est le taux continu i_C qui mesure le rendement d'un taux monétaire i. Dans l'encadré 14, on procède de la même façon que précédemment.

Application 14 : Du taux monétaire au taux continu

Soit un prêt à intérêt post-compté *i*, consenti pour une durée exacte *d*.

L'application du taux monétaire donne :

$$M_1 = M_0 \times \left(1 + i \times \frac{d}{360}\right)$$

Celle du taux continu :

$$M_1 = M_0 \times e^{i_C \frac{d}{365}}$$

On a donc :

$$e^{i_C \frac{d}{365}} = \left(1 + i \times \frac{d}{360}\right)$$

Le taux qui mesure le rendement continu d'un prêt à taux monétaire *i* de maturité *d* est donc :

$$i_c = \frac{365}{d} \times \ln\left(1 + i \times \frac{d}{360}\right)$$

Si *i*=5% et *d*=92 jours, i_c=5,04%.

Symétriquement le taux monétaire requis pour obtenir un rendement actuariel donné se calcule par :

$$i = \frac{360}{d} \times \left(e^{i_c \times \frac{d}{365}} - 1\right)$$

3) Du taux actuariel au taux continu

Encadré 15 : Du taux actuariel au taux continu

L'application du taux actuariel donne :

$$M_1 = M_0 \times (1 + i_A)^{\frac{d}{365}}$$

Celle du taux continu :

$$M_1 = M_0 \times e^{i_C \frac{d}{365}}$$

On a donc :

$$e^{i_C} = (1 + i_A)$$

Le taux qui mesure le rendement continu d'un prêt à taux monétaire *i* de maturité *d* est donc :

$$i_c = \ln(1 + i_A)$$

Si ***i***=5% : i_c=4,88%.