Introduction à la PLNE – Exercices -corrigé

I Pour fabriquer trois types de produits P_1, P_2, P_3, a firme Nacege a pour politique de .....

Variables :
x_i quantité produite du produit i
y_i = 1 ou 0 suivant que la machine i est louée ou non

Contraintes :
sur les matières premières
$4 x_1 + 3 x_2 + 4 x_3 \leq 160$
sur la main d'oeuvre
$3 x_1 + 2 x_2 + 6 x_3 \leq 150$

Objectif :
Max $(12 x_1 + 8 x_2 + 15 x_3 - (6 x_1 + 4 x_2 + 8 x_3) - (200 y_1 + 150 y_2 + 100 y_3)$

On pourrait penser que le problème s'écrit :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Max } 6 x_1 + 4 x_2 + 7 x_3 - (200 y_1 + 150 y_2 + 100 y_3) \\ 4 x_1 + 3 x_2 + 4 x_3 \leq 160 \\ 3 x_1 + 2 x_2 + 6 x_3 \leq 150 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ y_i = 1 \text{ ou } 0 \;\; i = 1,\ldots,3 \end{array} \right.$$

Sous cette forme il est clair qu'à l'optimum, les variables y_i seront nulles. Cette formulation n'est pas correcte. Il faut de plus écrire que l'on ne peut produire un bien que si on a loué la machine correspondante.
On adjoint pour cela les contraintes :
$x_1 \leq M y_1 \qquad x_2 \leq M y_2 \qquad x_3 \leq M y_3$
avec M suffisamment grand pour que la contrainte $x_i \leq M$ n'impose aucune valeur particulière à x_i (on peut prendre par exemple ici M = 100).
Ces contraintes traduisent le fait qu'il ne peut y avoir production ($x_i > 0$) que si la machine est louée ($y_i = 1$).
Ces contraintes n'interdisent pas d'avoir $y_i = 1$ et $x_i = 0$, la machine est louée mais il n'y a pas production. Mais une telle solution ne sera pas optimale.

Le problème s'écrit donc :

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Max } (6 x_1 + 4 x_2 + 7 x_3 - (200 y_1 + 150 y_2 + 100 y_3) \\ 4 x_1 + 3 x_2 + 4 x_3 \leq 160 \\ 3 x_1 + 2 x_2 + 6 x_3 \leq 150 \\ x_1 \leq M y_1 \\ x_2 \leq M y_2 \\ x_3 \leq M y_3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ y_i = 1 \text{ ou } 0 \;\; i = 1,\ldots,3 \end{array} \right.$$

***On suppose de plus que si on produit du bien P1, sa production doit être d'au moins 10 unités.*
Comment modifier la formulation précédente?
On doit donc avoir $x_1 = 0$ ou $x_1 \geq 10$
Pour traduire cela, on introduit une variable booléenne y et la contrainte :
$x_1 \geq 10 y$; si y = 1 alors $x_1 \geq 10$
Ceci n'est pas suffisant car si y = 0 on peut avoir $0 < x_1 < 10$

On écrit en plus :
$M\ y \geq x_1$ Si $y = 0$ alors $x_1 = 0$.
d'où le résultat:

$x_1 = 0$ ou $x_1 \geq 10$ se traduit par

$M\ y \geq x_1 \geq 10\ y$ avec $y = 0$ ou 1

II On considère un bien dont on souhaite planifier la production sur les T périodes à venir.
Variables de décision :
quantité à produire x_t = quantité à produire en période t , t = 1, ...,T

Pour simplifier la formulation on introduit des variables représentant le stock à la fin de chaque période.
y_t = stock en fin de période t après satisfaction de la demande, t = 1, ...,T

Contraintes
Contraintes liant les quantités produites (variables), les demandes (données) et les stocks (variables)
$y_{t-1} + x_t = d_t + y_t$
soit
$y_{t-1} + x_t - y_t = d_t$ pour t = 1 , ..., T
il faut connaître le stock initial y_0

On ne veut pas de rupture de stock. Il faut traduire que la demande de chacune des périodes est couverte par le stock de début de période complété par la production de la période :
$y_{t-1} + x_t \geq d_t$
or $y_t = y_{t-1} + x_t - d_t$
Il suffit donc d'imposer $y_t \geq 0$

Objectif :
Il s'agit de minimiser les coûts de production et de stockage;
Coût de stockage pour la période t : $h_t\, y_t$
Coût de production pour la période t :
0 si $x_t = 0$
$K_t + p_t\, x_t$ si $x_t > 0$

On ne doit tenir compte du coût fixe que si une production est effectivement mise en oeuvre.
Pour cela on introduit une variable booléenne z_t avec :
$x_t > 0$ implique $z_t = 1$
Le coût de production de la période t est alors :
$K_t\, z_t + p_t x_t$

Pour garantir que si $z_t = 0$ (on ne tient pas compte du coût fixe) il n'y a pas production on introduit une contrainte
$x_t \leq M\, z_t$

Le problème se modélise alors de la manière suivante :

$$\text{Min} \sum_{t=1}^{T} (K_t z_t + p_t x_t + h_t y_t)$$

$y_{t-1} + x_t - y_t = d_t$ pour t = 1 , ..., T
$x_t \leq M\, z_t$
$x_t , y_t \geq 0$ t = 1 , ..., T $z_t \in \{0 ,1\}$ t = 1, ..., T

Modifier la formulation précédente dans les cas suivants :

1 - Le niveau de production x du bien doit vérifier:

$x = 0$ ou $C_{min} \le x \le C_{max}$

Soit z une variable booléenne qui sera associée à l'un ou l'autre des cas de figure :

On peut écrire :

$x \le z\, C_{max}$ si $z = 0$ on aura alors $x = 0$

Il faut maintenant traduire que si $z = 1$ alors $x \ge C_{min}$

Il suffit d'écrire $x \ge C_{min}\, z$

Finalement on a :

$C_{min}\, z \le x \le z\, C_{max}$

$z=0$ implique $x = 0$

$z=1$ implique $C_{min} \le x \le C_{max}$

2 - Le niveau de production x du bien doit vérifier

$x = 0$ ou $x = Q$ ou $x = 2Q$ ....ou $x = m Q$

(la production est un multiple entier d'une taille de lot)

On associe à chaque cas possible une variable booléenne :

on écrit

$x = y_1 * Q + y_2 * 2Q + \quad + y_m * (mQ)$

avec $y_1 + ... + y_m \le 1$ ce qui garantit qu'au plus une des variables y_i sera égale à 1.

Si elles ont toutes nulles, on aura $x=0$.

III Pour préparer un envoi publicitaire vous avez la possibilité d'acquérir différents fichiers.....

Variables :

On introduit une variable booléenne par fichier :

$x_j = 1$ si le fichier j est acheté , 0 sinon

Contraintes :

Toutes les catégories de population sont couvertes :

Par exemple, pour la catégorie 1 on doit avoir

$x_1 + x_4 + x_8 \ge 1$ seuls les fichiers 1, 4 et 8 conviennent.

On a de même :

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \ge 1$$
$$x_2 + x_4 \ge 1$$
$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 \ge 1$$
$$x_7 + x_8 \ge 1$$
$$x_3 + x_4 + x_5 \ge 1$$

Objectif :

Min ($5000\, x_1 + 4000\, x_2 + 6000\, x_3 + 4750\, x_4 + 5500\, x_5 + 3000\, x_6 + 5750\, x_7 + 5250\, x_8$)

IV Le coach de l'équipe de football du Club Omnisport de Gercy s'apprête à constituer son équipe...

Variables :

$x_j = 1$ ou 0 suivant que le joueur j est ou non retenu (j = 1,.., n)

Contraintes :

$\sum_{j=1}^{n} x_j = 11$ (l'équipe comporte 11 joueurs)

$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge 3$ (au moins 3 doivent pouvoir jouer en attaque)

$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 4$ (au moins 4 doivent pouvoir jouer en défense)

$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j \geq 3*11$ (la valeur moyenne de l'équipe en passes doit être au moins de 3)

$x_3 + x_5 \leq 1$ (si le joueur 3 rentre alors le joueur 5 ne peut faire partie de l'équipe)

$x_1 \leq x_4$

$x_1 \leq x_6$ *(OU $2 x_1 \leq x_4 + x_6$)* (si le joueur 1 rentre les joueurs 4 et 6 doivent aussi rentrer)

Objectif :

Max $\sum_{j=1}^{n} T_j x_j$

b) On introduit une variable booléenne pour traduire le "ou" .
Les deux contraintes

$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq 3$ (au moins 3 doivent pouvoir jouer en attaque) **et**

$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 4$ (au moins 4 doivent pouvoir jouer en défense)

sont remplacées par

$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq 3\ y$ et $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 4\ (1 - y)$ avec $y = 0$ ou 1

Si y = 1, la contrainte sur l'attaque est respectée (celle sur la défense peut ne pas l'être)
Si y = 0 , la contrainte sur la défense est respectée (celle sur l'attaque peut ne pas l'être)