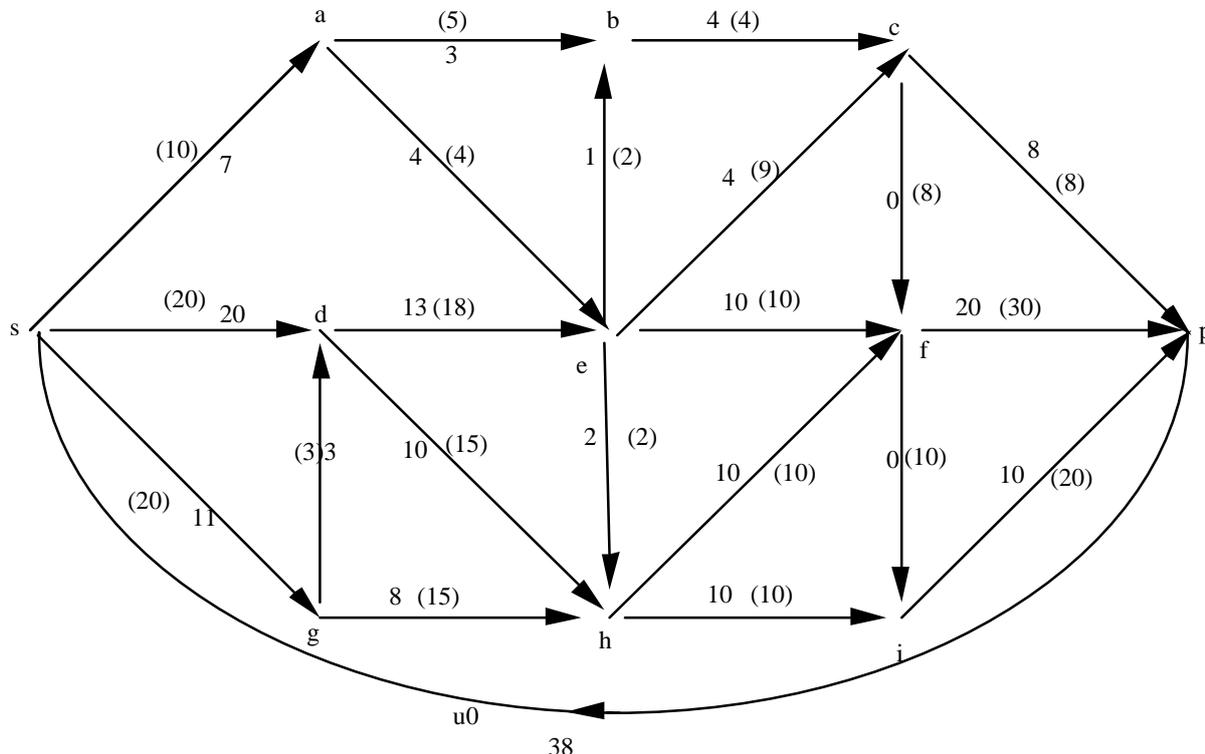


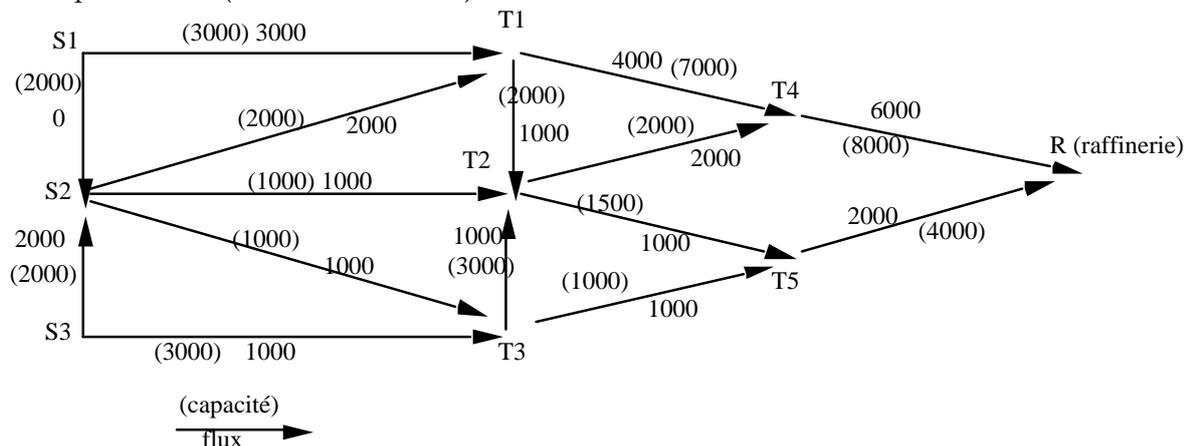
Le problème du flot maximal - Exercices

I Déterminer sur le réseau suivant, en partant du flot indiqué le long des arcs, un flot maximal ainsi qu'une coupe de capacité minimale.



II Une raffinerie de pétrole reçoit son pétrole brut à travers le réseau de pipe-lines schématisé ci-dessous. Le pétrole provient de 3 sources S_1, S_2, S_3 qui peuvent respectivement fournir 5000, 4000 et 3000 milliers de litres par heure.

Les capacités maximales des divers éléments du réseau sont indiquées le long des arcs du graphe entre parenthèses (en milliers de litres).



a) Les quantités de pétrole transmises à la raffinerie sont celles indiquées sur le graphe. Pensez vous que la quantité de pétrole brut reçue par la raffinerie soit maximale ? (Pour répondre à cette question vous ramènerez ce problème à un problème de flot maximal sur un réseau). Si non, quelle quantité maximale de pétrole brut la raffinerie peut-elle recevoir (en milliers de litres par heure) ? Comment peut-on l'obtenir ?

b) Afin d'augmenter encore cette quantité, doit-on augmenter la capacité des sources, ou celle de certains éléments de pipe-line? Dans l'un ou l'autre cas préciser lesquels.

III Cet exercice correspond à un problème connu sous le nom de " La promenade des demoiselles".

Le responsable d'un pensionnat est chargé d'organiser une promenade regroupant n garçons et n filles.

La sortie doit se faire en couples et le responsable souhaite constituer le plus grand nombre de couples tout en tenant compte des affinités.

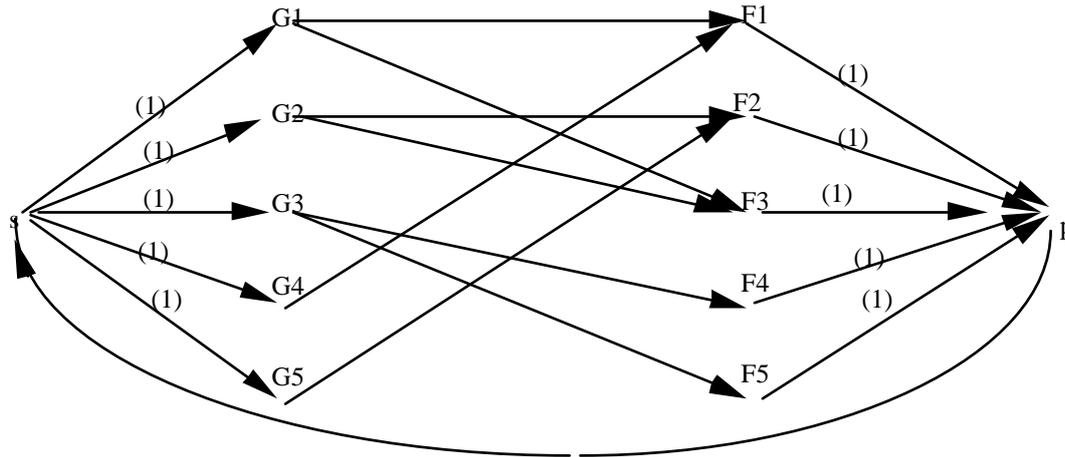
On suppose que les affinités sont symétriques et que l'on a identifié tous les couples possibles.

Attention ! le même garçon ne peut être affecté à plusieurs filles et chaque fille a au plus un garçon qui lui est affecté (cette histoire se passe il y a de nombreuses années !!).

Exemple : $n = 5$

Couples possibles : G1 avec F1 ou F3, G2 avec F2 ou F3, G3 avec F4 ou F5, G4 avec F1, G5 avec F2.

a) Ce problème peut être modélisé par un problème de flot maximal sur le graphe suivant ; justifier ce résultat.



Les arcs de type (s, G_i) et (F_j, p) sont munis de capacité supérieure égale à 1 et inférieure nulle.

Les arcs (G_i, F_j) sont uniquement munis de capacité inférieure nulle.

b) Le responsable du pensionnat propose alors la solution suivante : en affectant à chaque garçon la première fille de la liste des "possibles" il obtient les 3 couples : G1-F1, G2 - F2, G3-F4 .

Pensez-vous que cette solution soit optimale ? Sinon, **en résolvant le problème du flot maximal à partir de la solution retenue par le responsable**, proposer une solution conduisant au maximum de couples possibles.

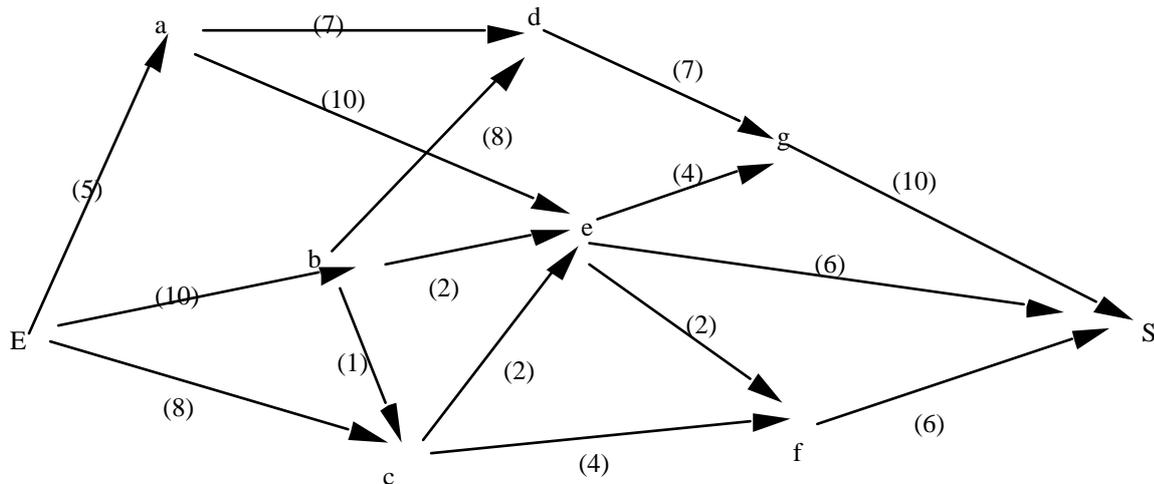
c) La solution que vous venez de trouver permet (par exemple) de constituer les 4 couples : G1-F3, G2-F2, G3-F4 et G4-F1 mais vous n'avez pas été en mesure de constituer 5 couples.

Afin de constituer 5 couples, le responsable propose de demander à G3 s'il accepterait de sortir avec F2. Pensez-vous que ceci permettra de constituer 5 couples ?

Quelles sont, pour vous, **toutes** les relations que l'on peut développer et qui permettraient de constituer 5 couples avec une seule de ses relations supplémentaires ?

d) On suppose que G1 accepte de sortir avec F4 (et réciproquement !), on doit alors pouvoir constituer 5 couples ; lesquels ?

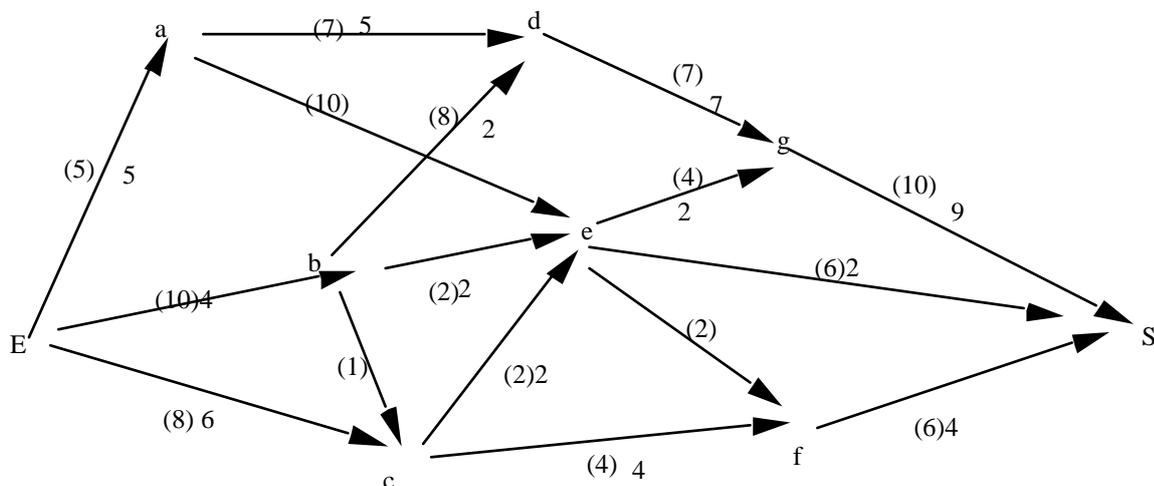
IV Le graphe ci-dessous représente le réseau routier permettant d'aller de la ville E à la ville S. Le long de chaque route est indiquée la capacité maximale en nombre de véhicules sur un week-end en milliers.



Ce graphe est issu de l'ouvrage "Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle" Tome I – Roseaux – paru chez MASSON.

Monsieur R., responsable de l'opération "renard rusé", indique que le nombre de véhicules transitant de E vers S ne peut dépasser 15 milliers.

Il indique que ce chiffre peut être atteint en orientant le trafic de manière à ce que, sur les différents axes, le nombre de véhicules circulant corresponde à ce qui est donné sur la figure ci-dessous. Il justifie sa décision en montrant que sur chaque "route" de E vers S au moins une partie du parcours est saturée.



a) Que pensez vous du diagnostic de Monsieur R ? Quel est pour vous le nombre maximal de véhicules qui pourront être acheminés de E vers S ? et comment ?

Si on devait améliorer le réseau routier que préconiseriez vous de faire prioritairement ?

b) Dans l'analyse précédente, il n'a pas été tenu compte du nombre maximal de véhicules pouvant traverser les agglomérations.

Pour la ville "e" il est impossible d'envisager un nombre de véhicules supérieur à 7 milliers.

La solution que vous avez trouvée ne respecte (en principe) pas cette contrainte.

Afin de résoudre ce nouveau problème, on modifie la représentation du réseau routier de la manière suivante :

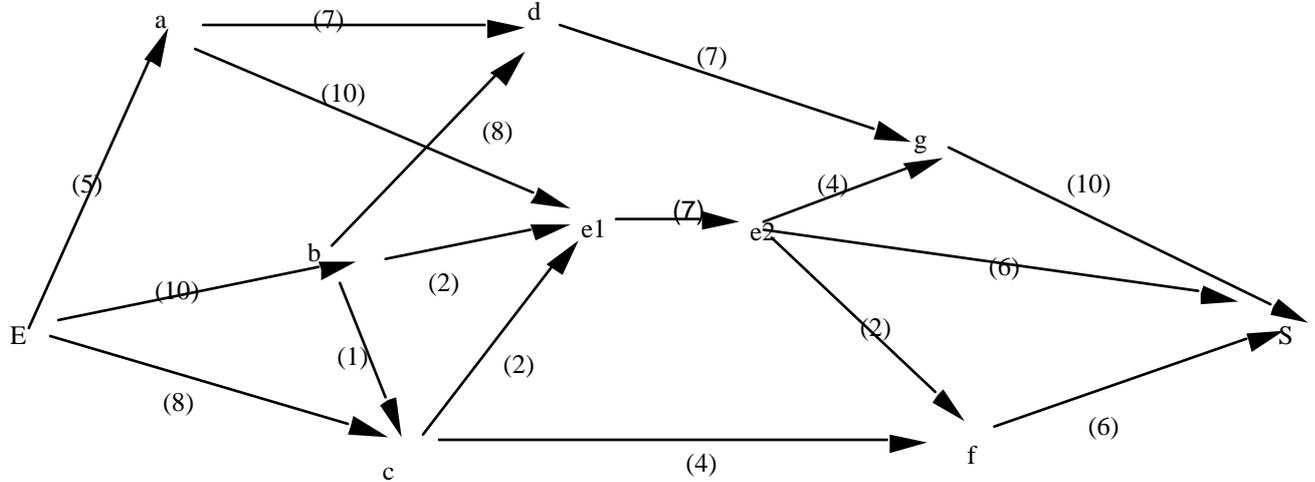
On dédouble chaque ville pour laquelle une contrainte est imposée.

Plus précisément pour une ville i en laquelle la capacité maximale est de c_i on crée deux sommets i_1 et i_2 .

Tous les arcs ayant pour extrémité i ont pour extrémité i_1 et ceux ayant pour origine i ont pour origine i_2 .

On ajoute un arc (i_1, i_2) muni d'une capacité c_i .

Le graphe qui résulte de cette procédure, pour l'exemple considéré, est donné ci-dessous.



1 - Indiquer pour quelles raisons cette représentation permet de résoudre le problème posé.

2 - Déterminer alors le nombre maximal de véhicules pouvant aller de E à S ? Comment peut-on l'atteindre ?

Quels sont les points noirs du réseau qu'il faut traiter prioritairement : traversée de villes et/ou tronçon routier ?

c) Suite à une campagne de sécurité routière la préfecture envisage d'implanter le long des routes des radars de manière à ce que tous les véhicules circulant de E vers S soient susceptibles d'être contrôlés.

1 - Montrer que le nombre minimal de radars à placer ainsi que leurs emplacements peuvent être obtenus en modélisant le problème par un problème de flot maximal après que des capacités adéquates aient été associées aux arcs du graphe.

Dans ce cas de figure, il est assez évident que le nombre minimal de radars est de 3 et qu'il suffit de les placer le long de (E,a) , (E,b) et (E,c) .

Retrouver ce résultat en déterminant le flot maximal sur le graphe du réseau dont les arcs ont été dotés des capacités adéquates.

2 - La sécurité routière constate que, pour échapper au contrôle, certains automobilistes utilisent une route de campagne entre E et d qui n'avait pas été considérée jusqu'alors (ce qui correspond à ajouter un arc (E,d) sur le graphe représentant le réseau routier).

Doit-on pour autant augmenter le nombre des radars ? Si oui, où doit-on maintenant les mettre ?

(Une solution évidente est de les mettre en (g,S) , (e,S) et (f,S) mais vous devez la trouver par résolution du problème auquel vous avez ramené celui de la détermination du nombre minimal de radars).