LA PROGRAMMATION LINEAIRE : RESOLUTION ANALYTIQUE

Dans cette leçon, nous abordons un algorithme de résolution d'un problème de programmation linéaire : l'algorithme du simplexe.
Nous le présentons d'abord sur un exemple avant d'en donner le principe général.
Nous verrons ensuite comment un outil comme Excel permet de résoudre un problème de programmation linéaire.

I Exemple

Reprenons le problème présenté dans la leçon d'introduction à la programmation linéaire.

$$\left|\begin{array}{ll} \text{Max } (400x_1 + 800x_2) & \\ \text{sous les contraintes} & \\ x_1 + x_2 \leq 10\,000 & (1) \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 48\,000 & (2) \\ 3x_1 + x_2 \leq 24\,000 & (3) \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 & \end{array}\right.$$

Ce problème modélise la détermination d'un plan de fabrication de deux types d'ordinateurs sous une contrainte de disponibilités de ressources : la contrainte (1) correspond à la limitation du nombre de processeurs disponibles, la contrainte (2) celle des barrettes mémoire et la contrainte (3) porte sur un temps limité pour l'assemblage.

Pour simplifier l'écriture, on change les unités :

$$\left|\begin{array}{ll} \text{Max } (4x_1 + 8x_2) & \\ \text{sous les contraintes} & \\ x_1 + x_2 \leq 10 & (1) \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 48 & (2) \\ 3x_1 + x_2 \leq 24 & (3) \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 & \end{array}\right.$$

La variable x_1 représente maintenant le nombre d'ordinateurs en milliers. Il en est de même pour x_2.
Les seconds membres des contraintes sont alors divisés par 1000 et représentent maintenant respectivement le nombre de processeurs disponibles (1), de barrettes (2) et de minutes d'assemblage (3) exprimés en milliers.

Les coefficients de la fonction objectif ont été divisés par 100 ; en conséquence, l'objectif est divisé par 100*1000. Il est donc maintenant exprimé en centaine de milliers d'euros : le coefficient de x_1 dans la fonction objectif, qui vaut maintenant 4, est le profit retiré de la vente de 1000 ordinateurs de type IM4 en centaine de milliers d'euros. Il en est de même pour le coefficient 8 de x_2 pour l'IM5.

La résolution graphique a conduit à la solution 3 milliers d'ordinateurs IM4 et 7 milliers d'ordinateurs IM5 : $x_1 = 3 \quad x_2 = 7$ avec un profit maximal de 68 (en centaine de milliers d'euros).
Il s'agit maintenant de retrouver ce résultat par le calcul.

II Résolution analytique : exemple de mise en oeuvre de l'algorithme du simplexe

La résolution graphique ne concerne que des problèmes avec 2 variables alors que les problèmes réels peuvent en avoir plusieurs milliers, voire centaine de milliers.
Nous allons sur cet exemple illustrer le principe d'un algorithme de résolution : **l'algorithme du simplexe.**
Cet algorithme est du à Dantzig - 1947.

Mise du problème sous forme standard
Dans un premier temps, on transforme le problème pour qu'il n'y ait que des contraintes d'égalité afin de manipuler des systèmes d'équations et non d'inéquations.

Un problème de programmation linéaire est dit sous **forme standard** si toutes les contraintes sont des contraintes d'égalité et toutes les variables sont positives.

Considérons la première contrainte :
$x_1 + x_2 \leq 10$
On introduit une variable positive appelée **"variable d'écart"** qui mesure l'écart entre le deuxième et le premier membre de l'inégalité.
$x_1 + x_2 + e_1 = 10$ avec $e_1 \geq 0$

On fait de même dans les 2 autres contraintes :
$2x_1 + 6x_2 \leq 48$ devient $2x_1 + 6x_2 + e_2 = 48$ avec $e_2 \geq 0$
$3x_1 + x_2 \leq 24$ devient $3x_1 + x_2 + e_3 = 24$ avec $e_3 \geq 0$

Le problème initial est maintenant sous forme standard :

$$
\left|
\begin{array}{ll}
\text{Max } (4x_1 + 8x_2) & \\
\text{sous les contraintes} & \\
x_1 + x_2 + e_1 = 10 & (1) \\
2x_1 + 6x_2 + e_2 = 48 & (2) \\
3x_1 + x_2 + e_3 = 24 & (3) \\
x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad e_1 \geq 0 \quad e_2 \geq 0 \quad e_3 \geq 0 &
\end{array}
\right.
$$

Les coefficients des variables d'écart dans la fonction objectif sont nuls.

Etude de solutions particulières
Considérons le système d'équations :

$$
\begin{array}{ll}
x_1 + x_2 + e_1 = 10 & (1) \\
2x_1 + 6x_2 + e_2 = 48 & (2) \\
3x_1 + x_2 + e_3 = 24 & (3)
\end{array}
$$

Ce système possède une infinité de solutions. Les solutions réalisables du problème sont les solutions positives de ce système d'équations.
Pour obtenir une solution particulière, il suffit de donner à x_1 et à x_2 une valeur particulière.
Par exemple, si $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$, on a $e_1 = 2$, $e_2 = 8$ et $e_3 = 12$.
Toutes ces valeurs sont positives, donc **cette solution est réalisable.**

Si $x_1 = 2$ et $x_2 = 8$, on a $e_1 = 0$, $\mathbf{e_2 = -4}$ et $e_3 = 10$.
La variable d'écart e_2 est négative, la deuxième contrainte du problème initial n'est donc pas vérifiée.
Cette solution n'est pas réalisable.

Considérons une première solution réalisable, celle obtenue en donnant à x_1 et à x_2 la valeur 0.

Solution 1
$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad e_1 = 10 \quad e_2 = 48 \quad e_3 = 24 \quad z = 0$

Test d'optimalité pour la solution 1
En examinant la fonction objectif ($z = 4x_1 + 8x_2$), on constate que si on augmente la valeur de x_1 ou celle de x_2, la valeur de la fonction augmentera : **la solution 1 n'est pas optimale.**

Construction de la solution 2
On construit une nouvelle solution en augmentant **une seule** des deux variables x_1 ou x_2 laissant l'autre nulle.

Le choix entre x_1 et x_2 peut être fait en considérant leur coefficient dans la fonction objectif. Le coefficient de x_2 est de 8 alors que celui de x_1 n'est que de 4 : en application du "premier critère de Dantzig", on choisit d'augmenter x_2 tout en laissant x_1 nulle.

Etude des conséquences de l'augmentation de x_2
Les variables étant liées entre elles par des égalités, lorsque x_2 augmente, x_1 restant nulle, la valeur des autres variables est modifiée. Il faut faire en sorte de rester dans le domaine des solutions réalisables. Toutes les variables doivent rester positives.

Posons $x_1 = 0$, le système des contraintes devient :

$$\begin{array}{lllll} x_2 + e_1 & & & = 10 & (1) \\ 6x_2 & + e_2 & & = 48 & (2) \\ x_2 & & + e_3 & = 24 & (3) \end{array}$$

On constate que lorsque x_2 augmente, les 3 variables d'écart diminuent.
Limitation de la valeur que l'on peut donner à x_2 :
Contrainte (1) $\quad x_2 = 10 \quad \Rightarrow e_1 = 0$
Contrainte (2) $\quad x_2 = 48/6 = 8 \quad \Rightarrow e_2 = 0$
Contrainte (3) $\quad x_2 = 24 \quad \Rightarrow e_3 = 0$

On ne peut faire augmenter x_2 au-delà de 8.
Pour x_2 égal à 8, la variable d'écart e_2 dans la deuxième contrainte devient nulle.

A partir de la première solution obtenue en donnant à x_1 et à x_2 la valeur 0, on a construit une deuxième solution meilleure puisque la fonction objectif vaut maintenant 64.

Solution 1
$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad e_1 = 10 \quad e_2 = 48 \quad e_3 = 24 \quad z = 0$
Solution 2
$x_1 = 0 \quad x_2 = 8 \quad e_1 = 2 \quad e_2 = 0 \quad e_3 = 16 \quad z = 64$

Il faut maintenant tester si la solution 2 est optimale.

Test d'optimalité pour la solution 2
Pour déterminer si la solution 2 est optimale, on modifie l'écriture du problème.
Dans le système actuel, les variables e_1, e_2 et e_3 sont exprimées en fonction de x_1 et x_2.

$$\begin{array}{lllll} x_1 + x_2 + e_1 & & & = 10 & (1) \\ 2x_1 + 6x_2 & + e_2 & & = 48 & (2) \\ 3x_1 + x_2 & & + e_3 & = 24 & (3) \end{array}$$

On réécrit le système de telle manière que les 3 variables e_1, x_2 et e_3, qui sont non nulles dans la solution 2, soient exprimées en fonction de x_1 et e_2 les 2 variables nulles.
Il faut que la variable x_2 n'apparaisse plus que dans la contrainte (2), tout en conservant e_1 dans la première contrainte et e_3 dans la troisième.

On divise l'équation (2) par 6, coefficient de x_2, de manière à ce que ce coefficient passe à 1 :
$2x_1 + \mathbf{6x_2} + e_2 = 48$ (2) $\Rightarrow x_1/3 + \mathbf{x_2} + e_2/6 = 8$ (2')

On élimine x_2 de l'équation numéro (1) sans faire apparaître e_3 en retranchant à la contrainte (1) la nouvelle contrainte (2') :
(1) - (2') $\Rightarrow 2x_1/3 + e_1 - e_2/6 = 2$ (1')

Pour éliminer x_2 de la troisième équation sans faire apparaître e_1 on retranche à la contrainte (3) la contrainte (2').
(3) - (2') $\Rightarrow 8x_1/3 - e_2/6 + e_3 = 16$

En résumé, on obtient le système :

$$\begin{array}{lllll} 2x_1/3 & & + e_1 - e_2/6 & = 2 & (1') \\ x_1/3 + x_2 & & + e_2/6 & = 8 & (2') \\ 8x_1/3 & & - e_2/6 + e_3 & = 16 & (3') \end{array}$$

Lorsque dans ce nouveau système, qui est équivalent au premier, on donne à x_1 et à e_2 la valeur 0, on retrouve la solution 2.

On peut maintenant tester son optimalité, en écrivant la fonction objectif en fonction x_1 et e_2, ce qui est possible puisque toutes les variables peuvent s'exprimer en fonction de x_1 et e_2.

On a $z = 4x_1 + 8x_2$
De l'équation (2)' on tire $x_2 = 8 - x_1/3 - e_2/6$
d'où :
$z = 4x_1 + 8 (8 - x_1/3 - e_2/6)$
$\;\; = 64 + 4x_1/3 - 4e_2/3$

Le coefficient de x_1 est positif donc si x_1 augmente, z va augmenter.
La solution 2 n'est pas optimale.

Construction de la solution 3
On cherche une meilleure solution en augmentant x_1 tout en laissant e_2 nulle.
Le système des contraintes est actuellement écrit sous la forme :

$$\begin{array}{llll} 2x_1/3 & + e_1 - e_2/6 & = 2 & (1') \\ x_1/3 + x_2 & + e_2/6 & = 8 & (2') \\ 8x_1/3 & - e_2/6 + e_3 & = 16 & (3') \end{array}$$

Si $e_2 = 0$, le système devient :

$$\begin{array}{llll} 2x_1/3 & + e_1 & = 2 & (1') \\ x_1/3 + x_2 & & = 8 & (2') \\ 8x_1/3 & + e_3 & = 16 & (3') \end{array}$$

Comme précédemment, on constate que si x_1 augmente, les 3 variables e_1, x_2, e_3 diminuent.
Contrainte (1') $x_1 = 3$ $\Rightarrow e_1 = 0$
Contrainte (2') $x_1 = 24$ $\Rightarrow x_2 = 0$
Contrainte (3') $x_1 = 6$ $\Rightarrow e_3 = 0$

On ne peut faire augmenter x_1 au-delà de 3. Pour x_1 égal à 3, la variable d'écart e_1 dans la première contrainte devient nulle.
On a ainsi une troisième solution réalisable obtenue avec $e_2 = 0$ et $x_1 = 3$

Solution 3
$x_1 = 3 \quad x_2 = 7 \quad e_1 = 0 \quad e_2 = 0 \quad e_3 = 8 \quad z = 68$
La fonction objectif vaut maintenant 68, cette solution est meilleure que la solution 2.

Il reste à tester son optimalité.

Test d'optimalité pour la solution 3
On modifie à nouveau l'écriture du problème.
Actuellement, dans le système de contraintes e_1, x_2 et e_3 sont exprimées en fonction de $x_1$et e_2. Il en est de même pour la fonction objectif.

$$\left|\begin{array}{lllll}
\text{Max } (z = 64 + 4 x_1/3 - 4 e_2/3) & & & & \\
2x_1/3 & + e_1 - e_2/6 & & = 2 & (1') \\
6x_1/3 + x_2 & + e_2/6 & & = 8 & (2') \\
8x_1/3 & -e_2/6 + e_3 & & = 16 & (3') \\
x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad e_1 \geq 0 \quad e_2 \geq 0 \quad e_3 \geq 0 & & & &
\end{array}\right.$$

On a augmenté x_1 jusqu'à ce que e_1 s'annule.

On permute le rôle joué par ces deux variables en faisant en sorte que ce soit désormais x_1 qui figure dans la seule première équation.

On utilise le même type de méthode que précédemment.
$(1') * 3/2 \quad \Rightarrow x_1 \quad + 3 e_1/2 \quad - e_2/4 \quad = 3 \quad (1'')$
$(2') - (1') /3 \quad \Rightarrow \quad x_2 \quad - e_1/2 \quad + e_2 \quad = 7 \quad (2'')$
$(3') - (1')*8/3 \quad \Rightarrow \quad - 4e_1 \quad + e_2/2 + e_3 \quad = 8 \quad (3'')$

En posant $e_1 = e_2 = 0$, on trouve la solution 3.
Pour tester si la solution 3 est optimale, on écrit la fonction objectif en fonction de e_1 et e_2 :
$z = 64 + 4 x1/3 - 4 e2/3$
$x1 + 3 e1/2 - e2/4 = 3 \quad \Rightarrow x_1 = 3 - 3 e1/2 + e2/4$
On remplace dans z et on obtient :
$z = 68 - 2e_1 - e_2$

Si on regarde la nouvelle écriture du problème,

$$\left|\begin{array}{lllll}
\text{Max } (z = 68 - 2e_1 - e_2) & & & & \\
 & & & & \\
x_1 & & + 3 e_1/ 2 & - e_2/4 & = 3 \ (1'') \\
 & x_2 & - e_1/2 & + e_2 & = 7 \ (2'') \\
 & & - 4 e_1 & + e_2/2 + e_3 & = 8 \ (3'') \\
\multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad e_1 \geq 0 \quad e_2 \geq 0 \quad e_3 \geq 0}
\end{array}\right.$$

Les coefficients de e_1 et de e_2 dans la fonction objectif sont négatifs, le maximum de z est atteint avec $e_1 = e_2 = 0$
La solution 3 est optimale.

On retrouve bien sûr les résultats obtenus graphiquement (voir leçon La PL : un outil de modélisation).

La valeur maximale est égale à : $z^* = 68$ pour $x_1 = 3$ $x_2 = 7$

L'analyse des variables d'écart nous permet de savoir les contraintes qui sont, à l'optimum, vérifiées avec égalité. Ce sont celles pour lesquelles la variable d'écart est nulle.

e_1 variable d'écart de la contrainte 1 nulle $\Rightarrow$ contrainte (1) saturée (ou liée)
e_2 variable d'écart de la contrainte 2 nulle $\Rightarrow$ contrainte (2) saturée
e_3 variable d'écart de la contrainte 3 non nulle $\Rightarrow$ contrainte (3) non saturée

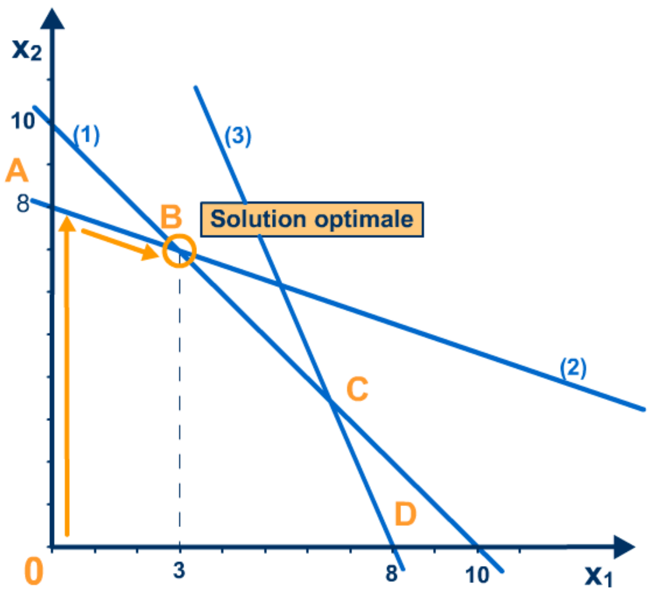
Les contraintes saturées sont intéressantes à mettre en évidence car ce sont elles qui limitent l'augmentation de la fonction objectif. Pour augmenter davantage la fonction objectif, il faudra "relâcher" ces contraintes.

III Résolution analytique : résumé et analyse graphique

Pour arriver à la solution optimale par le calcul, nous n'avons en fait examiné que 3 solutions particulières.

Solution 1
$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $e_1 = 10$ $e_2 = 48$ $e_3 = 24$ $z = 0$
On augmente x_2 en laissant $x_1 = 0$
Solution 2
$x_1 = 0$ $x_2 = 8$ $e_1 = 2$ $e_2 = 0$ $e_3 = 16$ $z = 64$
On augmente x_1 en laissant $e_2 = 0$
Solution 3
$x_1 = 3$ $x_2 = 7$ $e_1 = 0$ $e_2 = 0$ $e_3 = 8$ $z = 68$

Solution optimale
Examinons graphiquement la démarche poursuivie.



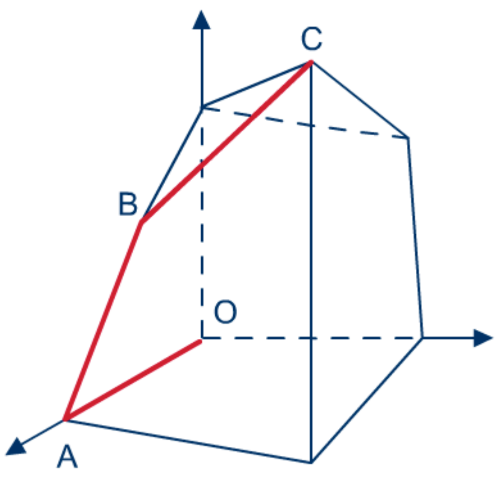
La solution 1 correspond au sommet 0. L'augmentation de x_2 en laissant x_1 nulle, revient à parcourir l'axe vertical.
Si x_2 devient plus grand que 8, on sort du domaine des solutions réalisables.
On s'arrête au sommet A qui correspond à la solution 2.
L'augmentation de x_1 en laissant e_2 nulle, revient à se déplacer le long de la droite associée à la deuxième contrainte. Si x_1 dépasse 3, on sort du domaine. On s'arrête en B qui correspond à la solution 3.

IV Principe de l'algorithme du simplexe

La méthode que nous venons d'utiliser est l'algorithme du simplexe du à Dantzig (1947).
Cet algorithme opère sur un problème mis sous forme standard : toutes les contraintes sont des contraintes d'égalité et toutes les variables sont positives.
On peut toujours ramener un problème de programmation linéaire quelconque à cette forme.
Un problème de maximisation de n variables et p contraintes, sous forme standard, s'écrit :

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{Max}(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots c_jx_j + \ldots\ldots c_nx_n) \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = d_1 \\ \ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n = d_i \\ \ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots\ldots + a_{pn}x_n = d_n \\ x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \geq 0 \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions réalisables pour un problème à 2 variables est représenté graphiquement par un polyèdre dans le plan (cf graphique ci-dessus).
Pour un problème de taille plus élevée, on peut encore lui associer un polyèdre avec des sommets, des faces, des arêtes, mais qui ne peut plus donner lieu à une représentation géométrique, sauf si on reste dans R^3.



Le principe de l'algorithme du simplexe est de construire une suite de solutions particulières qui correspondent à des sommets du polyèdre.
A partir d'un sommet initial, on passe d'un sommet à un sommet voisin en longeant les arêtes de telle manière que, entre deux solutions consécutives, la fonction objectif ne diminue pas.

Par exemple, sur le graphique précédent, on part de 0, puis on parcourt OA jusqu'au point A puis l'arête AB puis l'arête BC.

L'algorithme du simplexe examine des solutions particulières correspondant à des sommets du polyèdre des contraintes.
On peut démontrer que les solutions qui correspondent aux sommets sont obtenues en sélectionnant p variables parmi les n et en annulant les autres.
Supposons ici, pour simplifier l'écriture, que ce soient les p premières variables.

$$
\boxed{\begin{array}{ccccc}
a_{11}x_1 & +.. & + a_{1i}x_i & +.. & + a_{1p}x_p \\
 & \ldots & & \ldots & \\
a_{i1}x_1 & +.. & + a_{ii}x_i & +.. & + a_{ip}x_p \\
 & \ldots & & \ldots & \\
a_{p1}x_1 & +.. & + a_{pi}x_i & +.. & + a_{pp}x_p
\end{array}}
\begin{array}{cccccccc}
+ a_{1\ p+1} & x_{p+1} & +.. & + a_{1j}x_j & +.. & + a_{1n}x_n & = & d_1 \\
 & & \ldots & & \ldots. & & & \ldots. \\
+ a_{i\ p+1} & x_{p+1} & +.. & + a_{ij}x_j & +.. & + a_{in}x_n & = & d_i \\
 & & \ldots. & & \ldots.. & & & \ldots. \\
+ a_{pp+1} & x_{p+1} & +.. & + a_{pj}x_j & +.. & + a_{pn}x_n & = & d_p
\end{array}
$$

Si on annule les n-p autres variables, le système restant est à p équations et à p inconnues.

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +.. & + a_{1i}x_i & +.. & + a_{1p}x_p & = & d_1 \\
a_{i1}x_1 & +\ldots & + a_{ii}x_i & +\ldots & + a_{ip}x_p & = & d_i \\
a_{p1}x_1 & +.. & + a_{pi}x_i & +.. & + a_{pp}x_p & = & d_p
\end{array}
$$

On choisit les p variables de telle manière que la matrice des coefficients de ce système soit inversible (c'est alors un système de Cramer) : il a une unique solution.
On impose une condition complémentaire : cette solution doit être positive.

En résumé, le choix des p variables particulières est fait de telle manière que le système obtenu en annulant les n-p autres variables à une **unique solution positive**.

La solution particulière ainsi obtenue est appelée **solution de base**. Elle correspond à un sommet du polyèdre.
Les n-p variables nulles sont appelées **variables hors base** et les p autres variables sont **appelées variables de base** (cette dénomination vient de propriétés des systèmes d'équations en relation avec l'algèbre linéaire et les espaces vectoriels !).

Pratiquement, lorsqu'une première solution de base est déterminée, on met le système de contraintes sous une forme analogue à celle que l'on a manipulée dans l'exemple, avec chaque variable, dite de base, dans une et une seule équation :
(ici les variables de base sont supposées être les p premières).

$$
\begin{array}{lllllllll}
x_1 & & & + x_{p+1}a^B_{1p+1} & +\ldots & + x_j a^B_{1j} & +\ldots\ldots & + x_n a^B_{1n} & = d^B_1 \\
& x_i & & + x_{p+1}a^B_{ip+1} & +\ldots & + x_j a^B_{ij} & +\ldots\ldots & + x_n a^B_{in} & = d^B_i \\
& & x_p & + x_{p+1}a^B_{pp+1} & +\ldots & + x_j a^B_{pj} & +\ldots\ldots & + x_n a^B_{pn} & = d^B_p
\end{array}
$$

La solution de base est obtenue en annulant les variables hors base.
Pour étudier son optimalité, on exprime la fonction objectif en fonction des variables hors base, ce qui est possible puisque les variables de base sont exprimées en fonction des autres.
On teste le signe des coefficients des variables hors base dans la fonction objectif.

Si tous les coefficients sont négatifs, la solution de base est optimale.
Sinon, on change de solution de base en sélectionnant d'abord une variable x_r hors base dont l'augmentation fera augmenter la fonction objectif : on peut prendre, comme nous l'avons fait dans l'exemple, celle ayant le plus grand coefficient dans la fonction objectif (premier critère de Dantzig).
On fait augmenter cette variable hors base x_r en laissant les autres variables hors base nulles.

$$
\begin{array}{llllll}
x_1 & & & + x_r a^B_{1r} & = & d^B_1 \\
\ldots & & & \ldots & & \\
& x_i & & + x_r a^B_{ir} & = & d^B_i \\
\ldots & & & \ldots & & \\
& & x_p & + x_r a^B_{pr} & = & d^B_p
\end{array}
$$

On cherche la variable de base x_s qui s'annule en premier.
Géométriquement, ceci revient à se déplacer sur une arête du polyèdre et à s'arrêter au sommet voisin.

On détermine ainsi les nouvelles variables de base et les nouvelles variables hors base, x_r devient de base et x_s devient hors base.
On recommence avec la nouvelle solution de base !

V Résolution d'un problème de programmation linéaire avec le solveur d'Excel

La résolution manuelle ne peut se faire que pour des petits problèmes.
Le recours à l'informatique est indispensable. Pour les problèmes réels, les entreprises font appel à des logiciels professionnels.
On peut citer, par exemple, CPLEX de la société ILOG ou OSL d'IBM ou encore Xpress-MP de Dash.

Dans les fonctionnalités d'Excel, le solveur peut être utilisé pour des problèmes de taille moyenne.
Les algorithmes utilisés par le solveur ont pour base l'algorithme du simplexe tel que nous l'avons vu ou d'autres qui en sont dérivés.

Nous donnons ici les principaux éléments pour l'utilisation du solveur (se reporter au tutoriel).

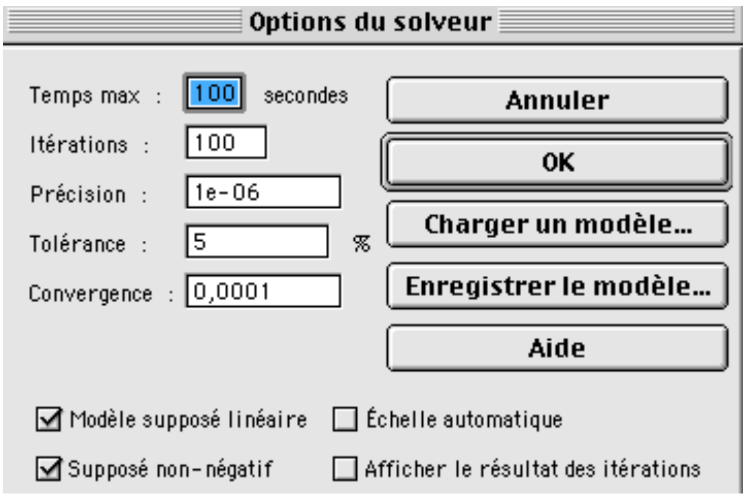
On commence par définir le problème :

Avant résolution

	A	B	C	D	E
		x1	x2		
4	**Variables**	**0**	**0**		
5					
6	**Contraintes**				
7	*Contrainte 1*	1	1	**0**	10
8	*Contrainte 2*	2	6	**0**	48
9	*Contrainte 3*	3	1	**0**	24
11	**Fonction objectif**	4	8		**0**

- en cellules B4 et C4 : les valeurs des variables.
On peut entrer une valeur ou chercher avec le solveur les valeurs optimales.
- en cellules D7 à D9 : le calcul de la valeur du premier membre des contraintes
- en cellule D7 : = SOMMEPROD(B4:C4;B7:C7)
- en cellule E11, le calcul de la fonction objectif : = SOMMEPROD(B11:C11;B4:C4)
La fonction SOMMEPROD d'Excel effectue la somme des produits du contenu des cellules des 2 zones.

On paramètre le solveur :



Si on veut les solutions successives, il faut cocher "afficher le résultat des itérations".

Après résolution par le solveur :

	A	B	C	D	E
		x1	x2		
	Variables	**3**	**7**		
	Contraintes				
7	*Contrainte 1*	1	1	**10**	10
8	*Contrainte 2*	2	6	**48**	48
9	*Contrainte 3*	3	1	**16**	24
11	**Fonction objectif**	4	8		**68**

Le rapport des réponses :

Microsoft Excel 10.1
Rapport des réponses
Feuille : [L7.solveur.xls]
Le problème

Cellule cible (Max)

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
$E$11	Fonction objectif	0	68

Cellules variables

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
$B$4	Variables x1	0	3
$C$4	Variables x2	0	7

Contraintes

Cellule	Nom	Valeur	Formule	État	Marge
$D$7	Contrainte 1	10	$D$7<=$E$7	Lié	0
$D$8	Contrainte 2	48	$D$8<=$E$8	Lié	0
$D$9	Contrainte 3	16	$D$9<=$E$9	Non lié	8

On retrouve (heureusement) les résultats que nous avions obtenus, que ce soit sur les valeurs des variables, de la fonction objectif ou du statut des contraintes.
La fonction objectif au départ vaut 0 et à l'optimum 68.
Le calcul a été lancé à partir de la solution $x_1 = x_2 = 0$.
La valeur finale pour x_1 est 3 et pour x_2 est 7.
Pour les contraintes :
- le premier membre de la contrainte vaut, à l'issue du calcul, 10, alors que le second membre était de 10, la contrainte est liée (saturée) et la marge représentant l'écart entre le second et le premier membre est nulle.
- même lecture pour les 2 autres contraintes : la contrainte 3 présente un écart de 8 entre son premier et son second membre.