L3 économie appliquée
EAD - Canège
Université Paris-sud
0dile Brandière

Correction des exercices de la leçon 6 : Formes Quadratiques

1. $q(x,y,z) = x^2 + 4xz + 2y^2 + z^2$.

   1) D'après le cours

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   2)Remarquons que A étant symétrique, A est digonalisable dans $\mathbb{R}$.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 & 2 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 \\ 2 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda).$$

   A a trois valeurs proptre distinctes $\lambda_1 = 2$ avec $m(\lambda_1) = 1$, $\lambda_2 = 3$ avec $m(\lambda_2) = 1$ et $\lambda_3 = -1$ avec $m(\lambda_3) = 1$.

   Détermination du sous-espace propre E_{λ_1} associé à $\lambda_1 = 2$

   En observant la deuxième colonne de A on en déduit immédiatement que
   $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que E_{λ_1} est donc engendré par $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Détermination du sous-espace propre E_{λ_2} asoocié à $\lambda_2 = 3$

$$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_2 V\}, \text{ soit } \begin{cases} x + 2z = 3x \\ 2y = 3y \\ 2x + z = 3z \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} .$$

$$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

   E_{λ_2} est donc engendré par $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Détermination du sous-espace propre E_{λ_3} associé à $\lambda_3 = -1$

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3}\} \Longleftrightarrow \{AV = \lambda_3 V\}$, soit $\begin{cases} x + 2z = -x \\ 2y = -y \\ 2x + z = -z \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$.

$\{V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\lambda_3}\} \Longleftrightarrow \{V = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

E_{λ_3} est donc engendré par $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\{V_1, V_2, V_3\}$ est un système de 3 vecteurs orthogonaux 2 à 2, mais V_2 et V_3 ne sont pas normés. En les normant, on obtient une base othonormée de vecteurs propres :
$P = \{V_1, \frac{V_1}{\|V_1\|}, \frac{V_2}{\|V_2\|}\} = \{(0,1,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$

3) Dans P, q a pour matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Et si (x,y,z) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans P, $q(x,y,z) = 2x'^2 + 3y'^2 - z'^2$ (1).

Et si on note M la matrice de passage de la base canonique vers P :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Et puisque M est orthogonale, $M^{-1} = {}^t M$. Donc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} \\ \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

(1) devient alors $q(x,y,z) = 2y^2 + 3(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}})^2$.

2. 1) $q(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 2xy - 4xz$.
La matrice symétrique représentant q est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$q(x,y,z) = (x^2 + 2xy - 4xz) + 5y^2 + 6z^2$
$q(x,y,z) = (x + y - 2z)^2 - (y - 2z)^2 + 5y^2 + 6z^2 \quad (1)$
$q(x,y,z) = (x + y - 2z)^2 + 4y^2 + 2z^2 + 4yz$
$q(x,y,z) = (x + y - 2z)^2 + 4(y + \frac{1}{2}z)^2 + z^2.$

Ainsi q est définie positive.

N.B : (1) n'est pas une forme réduite de q car les formes linéaires ne sont pas indépendantes ($\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont liés puisque ce sont 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$). Dans $\mathbb{R}^3$, une forme réduite comporte au plus 3 carrés.

2) $q(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 - xy - yz$
La matrice symétrique représentant q est

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$q(x,y,z) = (x^2 - xy) - y^2 + z^2 - yz = (x - \frac{1}{2}y)^2 - \frac{1}{4}y^2 - y^2 - yz + z^2 = (x - \frac{1}{2}y)^2 - \frac{5}{4}y^2 - yz + z^2$
$q(x,y,z) = (x - \frac{1}{2}y)^2 + (z - \frac{1}{2}y)^2 - \frac{3}{2}y^2.$

Ainsi q est indéfinie.

3)$q(x,y,z) = 2xy - x^2 - 2xz - 5y^2 + 6yz - 3z^2.$
La matrice symétrique représentant q est

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$q(x,y,z) = -(x^2 - 2xy + 2xz) - 5y^2 + 6yz - 3z^2 = -(x - y + z)^2 + (-y + z)^2 - 5y^2 + 6yz - 3z^2$
$q(x,y,z) = -(x - y + z)^2 - 4y^2 + 4yz - 2z^2 = -(x - y + z)^2 - 2(z - y)^2 - 2y^2.$

Ainsi q est définie négative.

4)$q(x,y,z) = 2xy - 2yz.$
La matrice symétrique représentant q est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$q(x,y,z) = \frac{1}{2}(x + y - z)^2 - \frac{1}{2}(x - y - z)^2$ (c.f. cours).

Ainsi q est dégénérée car elle a une valeur propre nulle.

3. $q(x,y,z) = x^2 + ay^2 + z^2 - xy - yz = (x^2 - xy) + ay^2 + z^2 - yz$
   $q(x,y,z) = (x - \frac{1}{2}y)^2 - \frac{1}{4}y^2 + ay^2 - yz + z^2$
   $q(x,y,z) = (x - \frac{1}{2}y)^2 + (z - \frac{1}{2}y)^2 + (a - \frac{1}{2})y^2.$

   Donc q est définie positive si et seulement si $a - \frac{1}{2} > 0$, soit
   $$a > \frac{1}{2}.$$

4. En reprenant la forme quadratique de **2** 1), la matrice symétrique représentant q est
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
   $1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 4 > 0.$
   On retrouve bien, d'après les résultats du cours, que q est définie positive.

   En reprenant la forme quadratique de **2** 2), la matrice symétrique représentant q est
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$
   $1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} < 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} < 0.$
   D'après le cours q est non dégénérée ($\det A \neq 0$) et n'est pas définie positive. La matrice symétrique représentant $-q$ est
   $$-A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$
   $-1 < 0$, $\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} < 0$ et $\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} > 0$. Donc $-q$ n'est pas définie positive, et q n'est pas définie négative. Par éliminattion on en déduit que q est indéfinie.

   Remarque : $\det A < 0$ donc si λ_1, λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de A, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$ et A a une valeur propre négative et deux positives (A ne peut avoir trois valeurs propres négatives sinon q serait définie négative). Et toute forme réduite de q a deux coefficients positifs et un négatif (c'est ce qu'on vérifie dans l'exercice 2).

En reprenant la forme quadratique de **2** 3), la matrice symétrique représentant q est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$-1 < 0$ donc d'après le cours q n'est pas définie positive. La matrice symétrique représentant $-q$ est

$$-A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 4 > 0$. Donc $-q$ est définie positive, et q est définie négative.

En reprenant la forme quadratique de **2** 3), la matrice symétrique représentant q est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le mineur d'ordre 1 vaut 0, donc q n'est ni définie positive, ni définie négative. D'autre part $\det A = 0$, donc A a une valeur propre nulle et q est dégénérée. $TrA = 0$ donc hormis la valeur propre nulle, A a deux valeurs propres opposées et toute forme réduite de q a seulement deux coefficients et ceux-ci sont de signes contraires.

5. Les mineurs de A sont :

$2 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ et

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 2 = 10 > 0$$

D'après le cours A est bien la matrice d'une forme quadratique définie positive.

6. (a) La matrice de q est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Utilisons la méthode des mineurs pour déterminer la nature de q.

   $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -13 < 0$, donc q est non dégénérée et n'est pas définie positive.

La matrice de $-q$ est $-A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $\Delta_1 = -3 < 0$. $-q$ n'est donc pas définie positive et q n'est pas définie négative.

Donc par élimination q est indéfinie. Et puisque $\det(A) < 0$ et que q n'est pas définie négative, A a une valeur propre négative et deux positives (en effet $\det(A)$ est le produit des valeurs propres). Et on peut donc aussi affirmer que la signature de q est (2,1).

(b) Utilisons la méthode du cours (matrice bordée).

Ici, avec les notations du cours, $n = 3$, $p = 1$ et donc $i = 2$ ou 3. Il y a donc deux mineurs principaux à déterminer et leur déterminant à calculer:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant les transformations suivantes : $C_1 \longrightarrow C_1 - C_3$ et $C_2 \longrightarrow C_2 + 2C_3$, on obtient :

$$\det(M_3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 < 0$$

$$\det(M_2) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

Et avec les notations du cours $(-1)^p \det(M_i) > 0$ et q est définie positive sous la contrainte (C_1).

(c) Utilisons la méthode du cours (matrice bordée).

Ici, avec les notations du cours, $n = 3$, $p = 2$ et donc $i = 3$. Il y a donc un seul mineur principal à déterminer et son déterminant à calculer:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant les transformations suivantes : $C_2 \longrightarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \longrightarrow C_3 + 2C_1$, on obtient :

$$\det(M_3) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

En faisant la transformation suivante : $C_2 \longrightarrow C_2 + C_1$, on obtient :

$$\det(M_3) = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 > 0.$$

Et avec les notations du cours $(-1)^p \det(M_i) > 0$ $(i = 3)$ et q est définie positivetive sous la contrainte (C_2).

7. 1) **Première méthode** (plus originale et astucieuse)

$$f(x, y, z) = (x - y)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 \geq 0$$

Donc $f(x, y, z)$ atteint son minimum 0 pour $x = y = -1$ et $z = 2$.

Deuxième méthode (plus classique)

Points stationnaires de f :

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y + 2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 4$. Donc le seul point stationnaire de f est $A = (-1, -1, 2)$

Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$.

La matrice hessienne de f en A est donc :

$$F''(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si on calcule les mineurs de $F''(A)$:

$$2 > 0 \ , \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0.$$

$F''(A)$ est donc la matrice d'une forme quadratique définie positive . A correspond à un minimum local de f. Ce minimum vaut $f(-1, -1, 2) = 0$.

2)**Première méthode** (plus originale et astucieuse)

$$g(x, y, z) = (x^2 - y)^2 + (y - z)^2 + (z - 2)^2 + 1 \geq 0$$

Donc $g(x, y, z)$ atteint son minimum 1 si $x^2 = y = z = 2$. $g(x, y, z)$ atteint son minimum en deux points : $A = (\sqrt{2}, 2, 2)$ et $B = (-\sqrt{2}, 2, 2)$.

Deuxième méthode (plus classique)

Points stationnaires de g :

$\frac{\partial g}{\partial x} = 4x^3 - 4xy$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -2x^2 + 4y - 2z$, $\frac{\partial g}{\partial z} = -2y + 4z - 4$.

$A = (x_0, y_0, z_0)$ est un point stationnaire de g si et seulement si $\begin{cases} x_0(x_0^2 - y_0) = 0 & (1) \\ x_0^2 - 2y_0 + z_0 = 0 & (2) \\ y_0 - 2z_0 = -2 & (3) \end{cases}$.

Si $x_0 = 0$, (1) est vérifiée et (2) et (3) donnent $y_0 = \frac{2}{3}$ et $z_0 = \frac{4}{3}$.

Si $x_0^2 = y_0$, (1) est vérifiée et (2) et (3) donnent $y_0 = z_0 = 2$. g a donc trois points stationnaires :
$A = (\sqrt{2}, 2, 2)$, $B = (-\sqrt{2}, 2, 2)$ et $C = (0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 12x^2 - 4y$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -4x$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} = -2$, $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = 4$.

La matrice hessienne de g en A est donc :

$$G''(A) = \begin{pmatrix} 16 & -4\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si on calcule les mineurs de $G''(A)$:
$16 > 0$, $\begin{vmatrix} 16 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} > 0$ et

$$\begin{vmatrix} 16 & -4\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 4 & -\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16 \times 8 > 0.$$

$G''(A)$ est donc la matrice d'une forme quadratique définie positive . A correspond à un minimum local de g.

La matrice hessienne de g en B est donc :

$$G''(B) = \begin{pmatrix} 16 & -4\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si on calcule les mineurs de $G''(B)$:
$16 > 0$, $\begin{vmatrix} 16 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} > 0$ et

$$\begin{vmatrix} 16 & 4\sqrt{2} & 0 \\ 4\sqrt{2} & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 4 & \sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16 \times 8 > 0.$$

$G''(B)$ est donc la matrice d'une forme quadratique définie positive . B correspond à un minimum local de g.

La matrice hessienne de g en C est donc :

$$G''(C) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si on calcule les mineurs de $G''(C)$:

$-\frac{8}{3} < 0$, $\begin{vmatrix} -\frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} < 0$ et $\begin{vmatrix} -\frac{8}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{8}{3} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} < 0.$

$G''(C)$ n'est donc pas la matrice d'une forme quadratique q définie positive, q n'est pas non plus définie négative. D'autre part $\det G''(C) \neq 0$, donc q est non dégénérée. Par élimination q est indéfinie et C est un point col de g.

8. $f(x, y, z) = x \ln y + z \ln x - y$.
f est définie et admet des dérivées partielles sur $\mathcal{D}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; n \; ; \; y > 0 \text{ et } x > 0\}$.

Points stationnaires de f : sur $\mathcal{D}_f$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln y + \frac{z}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} - 1$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \ln x$.

$A = (x_0, y_0, z_0)$ est un point stationnaire de f si et seulement si $\begin{cases} \ln y_0 + \frac{z_0}{x_0} = 0 & (1) \\ \frac{x_0}{y_0} - 1 = 0 & (2) \\ \ln x_0 = 0 & (3) \end{cases}$.

(3) donne $x_0 = 1$, (2) permet alors d'obtenir $y_0 = 1$ et (3) $z_0 = 0$.

Et $A = (1, 1, 0)$ est le seul point stationnaire de f (on vérifie bien que $A \in \mathcal{D}_f$).

Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{z}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

La matrice hessienne de f en A est donc :

$$F''(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det F''(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$

$F''(A)$ est donc la matrice d'une forme quadratique q non dégénérée . D'après les critères du cours q (mineurs de $F''(A)$) n'est ni définie positive ni définie négative. Donc par élimination q est indéfinie et A est un point col de f.

9. 1) $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2+y^2-2)$ est le Lagrangien de f sous la contrainte $x^2+y^2-2=0$. D'après le cours les extrema liés de f sont des points stationnaires de $\mathcal{L}$.

   Points stationnaires de $\mathcal{L}$:

   $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y + 2\lambda x$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x + 2\lambda y$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2$.

   $A = (x_0, y_0)$ est un point stationnaire de $\mathcal{L}$ si et seulement si il existe λ_0 tel que $\begin{cases} y_0 + 2\lambda_0 x_0 = 0 \\ x_0 + 2\lambda_0 y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2 = 0 \end{cases}$.

   Soit $\begin{cases} y_0 = -2\lambda_0 x_0 \quad (1) \\ x_0(1-4\lambda_0^2) = 0 \quad (2) \\ x_0^2 + y_0^2 - 2 = 0 \quad (3) \end{cases}$

   (2) équivaut à $x_0 = 0$ ou $\lambda_0 = \pm\frac{1}{2}$.

   Si $x_0 = 0$, (1) donne $y_0 = 0$ et (3) n'est pas vérifiée.

   Si $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, (1) donne $y_0 = -x_0$ et (3) donne $x_0 = \pm 1$.

   Si $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$, (1) donne $y_0 = x_0$ et (3) donne $x_0 = \pm 1$.

   D'où les 4 points stationnaires :

   $A = (1,-1)$ et $B = (-1,1)$ correspondant à $\lambda = \frac{1}{2}$.
   $C = (1,1)$ et $D = (-1,-1)$ correspondant à $\lambda = -\frac{1}{2}$.

   Conditions du second ordre :

   $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = 2\lambda$, et si $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$.

   La matrice hessienne bordée de f en A est donc :

$$M(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   $\det M(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -16.$

   En utilisant les notations du cours : $n = 2$, $p = 1$ et $i = 2$ est la seule valeur.
   Donc $(-1)^p \det M(A) > 0$ et d'après le cours A correspond à un minimun lié de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

   La matrice hessienne bordée de f en B est donc :

$$M(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det M(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -16.$$

Donc $(-1)^p \det M(B) > 0$ et d'après le cours B correspond à un minimun lié de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

La matrice hessienne bordée de f en C est donc :

$$M(C) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det M(C) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 16.$$

Donc $(-1)^i \det M(C) > 0$ et d'après le cours C correspond à un maximum lié de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

La matrice hessienne bordée de f en D est donc :

$$M(D) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det M(D) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 16.$$

Donc $(-1)^i \det M(D) > 0$ et d'après le cours D correspond à un maximum lié de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

2) $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \ln(x - y) + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$ est le Lagrangien de f sous la contrainte $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

$\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ est définie et admet des dérivées partielles sur

$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x - y > 0\}$.

D'après le cours les extrema liés de f sont des points stationnaires de $\mathcal{L}$.

Points stationnaires de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{x-y} + 2\lambda x$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{y-x} + 2\lambda y$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2$.

$A = (x_0, y_0)$ est un point stationnaire de $\mathcal{L}$ si et seulement si il existe λ_0 tel que $\begin{cases} \frac{1}{x_0 - y_0} + 2\lambda_0 x_0 = 0 & (1) \\ \frac{1}{y_0 - x_0} + 2\lambda_0 y_0 = 0 & (2) \\ x_0^2 + y_0^2 - 2 = 0 & (3) \end{cases}$.

Soit, en calculant (1) + (2) $\begin{cases} 2\lambda_0(x_0 + y_0) = 0 & (4) \\ \frac{1}{y_0 - x_0} + 2\lambda_0 y_0 = 0 & (2) \\ x_0^2 + y_0^2 - 2 = 0 & (3) \end{cases}$

(4) équivaut à $x_0 = -y_0$ ou $\lambda_0 = 0$.

Si $\lambda_0 = 0$, (2) n'est pas vérifiée.

Si $x_0 = -y_0$, (3) donne $x_0 = \pm 1$ et (2) donne $\lambda_0 = -\frac{1}{4}$.

D'où les 2 solutions :

$A = (1, -1)$ et $B = (-1, 1)$ correspondant à $\lambda = -\frac{1}{4}$.

$A \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ mais $B \notin \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$. $\mathcal{L}$ n'a donc qu'un seul point stationnaire $A = (1, -1)$.

Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x-y)^2} + 2\lambda$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x-y)^2} + 2\lambda$,
et si $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$.

La matrice hessienne bordée de f en A est donc :

$$M(A) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det M(A) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

En utilisant les notations du cours : $n = 2$, $p = 1$ et $i = 2$ est la seule valeur.
Donc $(-1)^i \det M(A) > 0$ et d'après le cours A correspond à un maximun lié de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

10. $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ est le Lagrangien de f sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
D'après le cours les extrema liés de f sont des points stationnaires de $\mathcal{L}$.

Points stationnaires de $\mathcal{L}$:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 + 2\lambda y$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 1 + 2\lambda z$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.
$A = (x_0, y_0, z_0)$ est un point stationnaire de $\mathcal{L}$ si et seulement si il existe λ_0 tel que
$$\begin{cases} 1 + 2\lambda_0 x_0 = 0 & (1) \\ 1 + 2\lambda_0 y_0 = 0 & (2) \\ 1 + 2\lambda_0 z_0 = 0 & (3) \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1 = 0 & (4) \end{cases}.$$
Soit, en calculant (1) - (2) $2\lambda_0(x_0 - y_0) = 0$ (5)

(5) équivaut à $x_0 = y_0$ ou $\lambda_0 = 0$.

Si $\lambda_0 = 0$, (1) n'est pas vérifiée.

Si $x_0 = y_0$, en calculant (1) - (3), on obtient de même $x_0 = z_0$. (4) donne alors $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

D'où les 2 points stationnaires de $\mathcal{L}$:

$A = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ correspondant à $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $B = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ correspondant à $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial z^2} = 2\lambda$,
et si $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$ et $\frac{\partial g}{\partial z} = 2z$.

La matrice hessienne bordée de f en A est donc :

$$M_3(A) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 & 2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det M_3(A) = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 & 2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{vmatrix} = -12.$$

En utilisant les notations du cours : $n = 3$, $p = 1$ et $i = 2$ ou 3. Il faut donc calculer $\det M_2(A)$ avec

$$M_2(A) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 2\frac{\sqrt{3}}{3}) \\ 0 & -\sqrt{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3}) \\ 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det M_2(A) = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 2\frac{\sqrt{3}}{3}) \\ 0 & -\sqrt{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3}) \\ 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{vmatrix} = 8\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Donc $(-1)^i \det M_i(A) > 0$ (pour $i = 2$ ou 3) et d'après le cours A correspond à un maximun lié de f sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

Si on considère le point stationnaire B, on constate que

$M_3(B) = -M_3(A)$ et $M_2(B) = -M_2(A)$.

Donc $\det M_3(B) = (-1)^4 \det M_3(A) = \det M_3(A) < 0$ et
$\det M_2(B) = (-1)^3 \det M_2(A) = -\det M_2(A) < 0$.

D'où $(-1)^p \det M_i(B) > 0$ (pour $i = 2$ ou 3) et d'après le cours B correspond à un minimun lié de f sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

2)$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + z^2 - 1)$ est le Lagrangien de f sous la contrainte $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + z^2 - 1 = 0$.
D'après le cours les extrema liés de f sont des points stationnaires de $\mathcal{L}$.

Points stationnaires de $\mathcal{L}$:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = yz + \frac{\lambda x}{2}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = xz + \frac{2\lambda y}{3}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = xy + 2\lambda z$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + z^2 - 1$.
$A = (x_0, y_0, z_0)$ est un point stationnaire de $\mathcal{L}$ si et seulement si il existe λ_0 tel que
$$\begin{cases} y_0 z_0 + \frac{\lambda_0 x_0}{2} = 0 \quad (1) \\ x_0 z_0 + \frac{2\lambda_0 y_0}{3} = 0 \quad (2) \\ x_0 y_0 + 2\lambda_0 z_0 = 0 \quad (3) \\ \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} + z_0^2 - 1 = 0 \quad (4) \end{cases}.$$

Si $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{3})$, (4) est vérifiée et (1), (2) et (3) sont vérifiée avec $\lambda_0 = -1$.

Si $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{2\sqrt{3}}{3}, -1, \frac{\sqrt{3}}{3})$, (4) est vérifiée et (1), (2) et (3) sont vérifiée avec $\lambda_0 = 1$.

D'où les 2 points stationnaires de $\mathcal{L}$:

$A = (\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{3})$ correspondant à $\lambda = -1$ et $B = (\frac{2\sqrt{3}}{3}, -1, \frac{\sqrt{3}}{3})$ correspondant à $\lambda = 1$.

Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{2}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} = z$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial z} = y$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = \frac{2\lambda}{3}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z^2} = 2\lambda$,
et si $g(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + z^2 - 1$, $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{2}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2y}{3}$ et $\frac{\partial g}{\partial z} = 2z$.

La matrice hessienne bordée de f en A est donc :

$$M_3(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -2 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det M_3(A) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -2 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{16}{3}.$$

En utilisant les notations du cours : $n = 3$, $p = 1$ et $i = 2$ ou 3. Il faut donc calculer $\det(M_2(A))$ avec

$$M_2(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det M_2(A) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{8}{9}.$$

Donc $(-1)^i \det M_i(A) > 0$ (pour $i = 2$ ou 3) et d'après le cours A correspond à un maximun lié de f sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

La matrice hessienne bordée de f en B est donc :

$$M_3(B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & 2\frac{2\sqrt{3}}{3} & 2 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det M_3(B) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & 2\frac{2\sqrt{3}}{3} & 2 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{16}{3}.$$

$$M_2(B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det M_2(B) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{8}{9}.$$

D'où $(-1)^p \det M_i(B) > 0$ (pour $i = 2$ ou 3) et d'après le cours B correspond à un minimun lié de f sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

11. **Première méthode**

$z = x + 3$ et $y = x$, le problème revient donc à optimiser

$$\varphi(x) = 5x^2 + 48x + 90.$$

D'où le minimum pour $x = y = -\frac{24}{5}$ et $z = -\frac{9}{5}$.

Deuxième méthode suggérée par l'énoncé.

$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 4xy + 12z + 6z^2 + \lambda_1(z - x - 3) + \lambda_2(y - x)$ est le Lagrangien de f sous les contraintes $g_1(x, y, z) = z - x - 3 = 0$ et $g_2(x, y, z) = x - y = 0$.

D'après le cours les extrema liés de f sont des points stationnaires de $\mathcal{L}$.

Points stationnaires de $\mathcal{L}$:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x - 4y - \lambda_1 + \lambda_2$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 4y - 4x - \lambda_2$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 12 + 12z + \lambda_1$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = z - x - 3$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = x - y$.
$A = (x_0, y_0, z_0)$ est un point stationnaire de $\mathcal{L}$ si et seulement si il existe λ_1 et λ_2 tel que

$$\begin{cases} 2x_0 - 4y_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (1) \\ 4y_0 - 4x_0 - \lambda_2 = 0 \quad (2) \\ 12 + 12z_0 + \lambda_1 = 0 \quad (3) \\ z_0 - x_0 - 3 = 0 \quad (4) \\ x_0 - y_0 = 0 \quad (5) \end{cases} .$$

Si $(x_0, y_0, z_0) = (-\frac{24}{5}, -\frac{24}{5}, -\frac{9}{5})$, (4) et (5) sont vérifiées et (1), (2) et (3) sont vérifiée avec $\lambda_1 = \frac{48}{5}$ et $\lambda_2 = 0$.

D'où un point stationnaire de $\mathcal{L}$:

$A = (-\frac{24}{5}, -\frac{24}{5}, -\frac{9}{5})$ correspondant à $\lambda_1 = \frac{48}{5}$ et $\lambda_2 = 0$

Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} = -4$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = 4$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z^2} = 12$,
$\frac{\partial g_1}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial g_1}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial g_1}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial g_2}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial g_2}{\partial y} = -1$ et $\frac{\partial g_2}{\partial z} = 0$.

La matrice hessienne bordée de f en A est donc :

$$M_4(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det M_4(A) = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 26.$$

En utilisant les notations du cours : $n = 3$, $p = 2$ et $i = 3$ est la seule valeur de i . Donc $(-1)^p \det M_4(A) > 0$ et d'après le cours A correspond à un minimun lié de f sous les contraintes $g_1(x, y, z) = 0$ et $g_2(x, y, z) = 0$.

12. (a) En appliquant la méthode suggérée dans le cours. Ici $n = 3$, $p = 1$ et $i = 2$ ou 3.
Nous avons donc deux matrices bordées à fabriquer :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant les combinaisons linéaires de colonnes $C_2 \to C_2 - C_1$ et $C_4 \to C_4 - C_1$:

$$\det M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4+1+1-(2-1+2) < 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2+2-(3+4) < 0.$$

Donc ici $(-1)^p detM_i > 0$ (pour $i = 2$ ou 3) et d'après le cours q est définie positive sous la contrainte C_1

(b) Si on considère la contrainte C_2 : $\begin{cases} x+2y-z=0 & (1) \\ x-y+z=0 & (2) \end{cases}$, $n = 3$, $p = 2$ et $i = 3$. Il n'y a donc qu'une matrice bordée à établir :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant les combinaisons linéaires de colonnes $C_1 \to C_1 + C_2$ et $C_3 \to C_3 + C_2$:

$$\det M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

En faisant la combinaison linéaire de colonnes $C_1 \to C_1 - 3C_2$:

$$\det M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-2-4-(8+1+2)) > 0.$$

Là encore on a $(-1)^p detM_i > 0$ (pour $i = 3$) et d'après le cours q est définie positive sous la contrainte C_2.

13. Points stationnaires de F :

$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x + 2y + 2z - 6$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y + \frac{2}{3}z - 2$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2x + \frac{2}{3}y + \frac{8}{3}z - 2$.

$A = (x_0, y_0, z_0)$ est un point stationnaire de F si et seulement si $\begin{cases} 3x_0 + y_0 + z_0 = 3 & (1) \\ x_0 + y_0 + \frac{1}{3}z_0 = 1 & (2) \\ x_0 + \frac{1}{3}y_0 + \frac{4}{3}z_0 = 1 & (3) \end{cases}$.

D'où $y_0 = z_0 = 0$ et $x_0 = 1$.

Et $A = (1, 0, 0)$ est le seul point stationnaire de F.

Conditions du second ordre :

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{2}{3}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{8}{3}$.

La matrice hessienne de F en A est donc :

$$F''(A) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Or $6 > 0$, $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} > 0$ et $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{vmatrix} = 16 > 0$

$F''(A)$ est donc la matrice d'une forme quadratique définie positive. D'après le cours A correspond donc à un minimum local de F.

14. 1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) $q(x, y, z) = 2(x^2 - 2xy + 2xz) + y^2 - 6yz + 3z^2 = 2[(x - y + z)^2 - (-y + z)^2] + y^2 - 6yz + 3z^2$
$q(x, y, z) = 2(x - y + z)^2 - y^2 - 2yz + z^2 = 2(x - y + z)^2 - (z + z)^2 + 2z^2$.
D'où la forme réduite de q :

$$q(x, y, z) = 2(x - y + z)^2 - (z + z)^2 + 2z^2.$$

q est non dégénérée et indéfinie. Elle change de signe. A a deux valeurs propres positives et une négative.

3) Avec les notations du cours : $n = 3$, $p = 1$, donc $i = 2$ ou 3.

Matrice bordée :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $i = 2$:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculons les déterminant de ces deux matrices :

$$\det M_3 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 < 0.$$

Et $\det M_2 = -28 < 0$

On en déduit que $(-1)^p \det M_i > 0$ (pour $i = 2$ ou 3) et d'après le cours q est définie positive sous la contrainte $2x + 2y + z = 0$.

15. $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x\exp(-x + y^2) + xy - 3y^2 + 4y + \lambda(x^2 + y^2 + xy - 3)$ est le Lagrangien de f sous la contrainte $x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$.

    $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ est définie et admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.

    D'après le cours les extrema liés de f sont des points stationnaires de $\mathcal{L}$.

    Points stationnaires de $\mathcal{L}$:

    $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (1 - x)\exp(-x + y^2) + y + 2\lambda x + \lambda y$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2x\exp(-x + y^2) + x - 6y + 4 + 2\lambda y + \lambda x$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + xy - 3$.

    $A = (x_0, y_0)$ est un point stationnaire de $\mathcal{L}$ si et seulement si il existe λ_0 tel que

    $$\begin{cases} (1 - x_0)\exp(-x_0 + y_0^2) + y_0 + 2\lambda x_0 + \lambda y_0 = 0 \quad (1) \\ 2x_0\exp(-x_0 + y_0^2) + x_0 - 6y_0 + 4 + 2\lambda y_0 + \lambda x_0 = 0 \quad (2) \\ x_0^2 + y_0^2 + x_0 y_0 - 3 = 0 \quad (3) \end{cases} .$$

    Si on pose $x_0 = y_0 = 1$, (3) est vérifiée et (1) et (2) sont vérifée pour $\lambda_0 = -\frac{1}{3}$.

    $\mathcal{L}$ a donc bien pour point stationnaire $A = (1, 1)$ correspondant à $\lambda = -\frac{1}{3}$.

    2) Conditions du second ordre :

    $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = (-2 + x)\exp(-x + y^2) + 2\lambda$, $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} = 2y(1 - x)\exp(-x + y^2) + 1 + \lambda$,

    $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = (2x + 4y^2 x)\exp(-x + y^2) - 6 + 2\lambda$, et si $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3$,

    $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y + x$.

    La matrice hessienne bordée de f en A est donc :

    $$M(A) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

    $$\det M(A) = \begin{vmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 3 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 33 > 0.$$

    En utilisant les notations du cours : $n = 2$, $p = 1$ et $i = 2$ est la seule valeur de i.

    Donc $(-1)^i \det M(A) > 0$ et d'après le cours A correspond à un maximun lié de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.