Leçon 06 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 7 : 1) Soit $f(x,y,z) = 4x^3 + y^3 – 4xy$ sous la contrainte $g(x,y) = x^3 – xy + 2 = 0$. Déterminer les extrema d ef sous cette contrainte.
2) Soit $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2) – z^3 + x^2z^2 – 2x – 5y + 2$ sous les contraintes $\begin{cases} g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \\ g_2(x,y,z) = xy + xz + yz - 1 = 0 \end{cases}$. Montrer que (0,1,1) est un point stationnaire du lagrangien. Déterminer la nature de ce point stationnaire.

Solution

1) f et g sont polynomiales et admettent des dérivées partielles à tous les ordres.

Points stationnaires du lagrangien, conditions du premier ordre.
$L(x,y,\lambda) = 4x^3 + y^3 – 4xy + \lambda(x^3 – xy + 2)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y) = 12x^2 - 4y + \lambda(3x^2 - y) = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 4x - \lambda x = 0 \quad (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y) = x^3 – xy + 2 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

. (1) donne $(4 + \lambda)(3x^2 – y) = 0$

Si $\lambda = -4$ (2) donne $y = 0$ et (3) donne $x = -\sqrt[3]{2}$.
Si $\lambda \neq -4$, $3x^2 = y$ et (3) donne $x = 1$. On en déduit alors que $y = 3$ et $\lambda = 23$.

L a donc deux points stationnaires : $A = (-\sqrt[3]{2} , 0)$ associé à $\lambda = 4$ et $B = (1 , 3)$ associé à $\lambda = 23$.
Ici $n = 2$, $p = 1$ et i prend la seule valeur 2.
Calculons les dérivées partielles secondes d'ordre 2 de L et les dérivées premières de g :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) = 24x + 6\lambda x \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) = - 4x - \lambda \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) = 6y \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - y \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -x \end{cases} \quad \text{et } M = M_2 = \begin{pmatrix} 24x + 6\lambda x & -4x - \lambda & 3x^2 - y \\ -4x - \lambda & 6y & -x \\ 3x^2 - y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

• Pour $A= (-\sqrt[3]{2} , 0)$ et $\lambda = 4$, la matrice hessienne bordée est :

$$M = M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3\sqrt[3]{4} \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \\ 3\sqrt[3]{4} & \sqrt[3]{2} & 0 \end{pmatrix}. \text{ dét}M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3\sqrt[3]{4} \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \\ 3\sqrt[3]{4} & \sqrt[3]{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On ne peut donc pas conclure avec les théorèmes du cours et une étude directe s'impose.

On fait comme dans le cours de L2 le changement de variable $x = -\sqrt[3]{2} + h$ pour se ramener au voisinage de 0 et on étudie le signe de $\Delta = f(x,y) - f(-\sqrt[3]{2},0)$ au voisinage de $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ (ou plutôt, ce qui revient au même, de $\Delta = f(-\sqrt[3]{2}+h,y) - f(-\sqrt[3]{2},0)$ au voisinage de (0,0)) en tenant compte de la contrainte $g(x,y) = 0$ (ou plutôt $g((-\sqrt[3]{2}+h,y) = 0$).

$$\begin{cases} \Delta = 4(-\sqrt[3]{2}+h)^3 + y^3 - 4(-\sqrt[3]{2}+h)y - 8 \quad (1) \\ (-\sqrt[3]{2}+h)^3 - (-\sqrt[3]{2}+h)y + 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$ en utilisant la contrainte (2) :

$(-\sqrt[3]{2}+h)^3 = (-\sqrt[3]{2}+h)y - 2$ et $\Delta = y^3$. Donc Δ change de signe sur tout voisinage de 0 et A correspond à un point col.

• Pour B = (1, 3) et $\lambda = 23$, la matrice hessienne bordée est :

$$M = M_2 = \begin{pmatrix} 162 & -27 & 0 \\ -27 & 18 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{dét}M_2 = \begin{vmatrix} 162 & -27 & 0 \\ -27 & 18 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 162 & 0 \\ -27 & -1 \end{vmatrix} = -162 < 0.$$

Donc $(-1)^p \text{dét}M_2 = -(-162) > 0$. Donc B correspond à un minimum de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

2) f et g_1 et g_2 admettent des dérivées partielles à tous les ordres sur l'ensemble $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + y^2 \neq 0\}$.

Sur D, $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \ln(x^2 + y^2) - z^3 + x^2z^2 - 2x - 5y + 2 + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 2) + \lambda_2(xy + xz + yz - 1)$.

Montrons que (0,1,1) est un point stationnaire du lagrangien. Il suffit de montrer que (0,1,1) vérifie les conditions du premier ordre pour certaines valeurs de λ_1 et λ_2 que l'on déterminera.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{2x}{x^2+y^2} + 2xz^2 - 2 + \lambda_1(2x) + \lambda_2(y+z) = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \frac{2y}{x^2+y^2} - 5 + \lambda_1(2y) + \lambda_2(x+z) = 0 \quad (2) \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = -3z^2 + 2x^2z + \lambda_1(2z) + \lambda_2(x+y) \quad (3) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 \quad (4) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xy + xz + yz - 1 = 0 \quad (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(0,1,1,\lambda_1,\lambda_2) = -2 + 2\lambda_2 = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(0,1,1,\lambda_1,\lambda_2) = -3 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(0,1,1,\lambda_1,\lambda_2) = -3 + 2\lambda_1 + \lambda_2 \quad (3) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}(0,1,1,\lambda_1,\lambda_2) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2}(0,1,1,\lambda_1,\lambda_2) = 0 \end{cases}$$

, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1$ conviennent.

(0,1,1) est donc bien un point stationnaire du lagrangien associé à $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1$.

Conditions du second ordre :
Calculons les dérivées partielles secondes d'ordre 2 de L et les dérivées premières de g :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \dfrac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2z^2 + 2\lambda_1 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} + \lambda_2 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 4xz + \lambda_2 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \dfrac{-2y^2 + 2x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2\lambda_1 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \lambda_2 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x,y,z) = -6z + 2x^2 + 2\lambda_1 \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = y + z \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = x + z \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = x + y \end{cases}$$

et au point (0,1,1)

$$M = M_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \text{dét}M_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{dét}M_2 = 2\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-8)\times 12 < 0.$$ Or $(-1)^i\text{dét}M_2 = 96 > 0$ et d'après le cours (0,1,1) correspond à un maximum de f sous les contraintes $g_1(x,y,z) = 0$ et $g_2(x,y,z) = 0$.