Leçon 06 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 6 : Soit $f(x,y,z) = 8x^3 + y^3 – 12xyz + 10z^3 – 6z$. Déterminer les extrema de f et leur nature.

Solution

f est une fonction polynomiale et a donc des dérivées partielles à tous les ordres sur $\mathbf{R}^3$.

D'autre part grad $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 12yz \\ 3y^2 - 12xz \\ -12xy + 30z^2 - 6 \end{pmatrix}$ et grad $f(x,y,z) = \mathbf{0}$ si et seulement si

$\begin{cases} 12x^2 - yz = 0 & (1) \\ y^2 - 4x\,z = 0 & (2) \\ 5z^2 - 2xy - 1 = 0 & (3) \end{cases}$. (1) et (2) nous permettent d'affirmer que x, y et z sont de même signe.

D'autre part si (x,y,z) est solution, (-x,-y,-z) l'est aussi.

z = 0 n'est pas solution et donc si $z \neq 0$ (1) équivaut à $y = \frac{2x^2}{z}$ et en reportant dans (2) on obtient $\frac{4x^4}{z^2} - 4xz = 0$. Cela donne $4x(x^3 – z^3) = 0$, soit x = 0 ou x = z.

Si x = 0, y = 0 et $z = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Si x = z $\neq 0$ alors $y^2 – 4x^2 = 0$ et y = -2x (impossible car x et y sont de même signe) ou y = 2x. z = x donne par (3) $z^2 = 1$.

D'où les 4 points stationnaires :

A = (1,2,1), A' = (-1,-2,-1), B = $(0,0,\frac{1}{\sqrt{5}})$ et B' = $(0,0,-\frac{1}{\sqrt{5}})$.

Remarquons que f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z). Il suffit donc de se limiter à A et B. En effet si A est un maximun (respectivement minimum) A' est minimum (respectivement maximum). De même pour B et B'.

Le calcul donne $F''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 48x & -12z & -12y \\ -12z & 6y & -12x \\ -12y & -12x & 60z \end{pmatrix}$.

$F''(A) = \begin{pmatrix} 48 & -12 & -24 \\ -12 & 12 & -12 \\ -24 & -12 & 60 \end{pmatrix}$ les mineurs de cette matrice symétrique sont $\Delta_1 = 48 > 0$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 48 & -12 \\ -12 & 12 \end{vmatrix} = 12^2 \times 5 > 0$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 48 & -12 & -24 \\ -12 & 12 & -12 \\ -24 & -12 & 60 \end{vmatrix} = 12^3 \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 12^3 \times 3 > 0$.

On en déduit donc que F''(A) est la matrice dune forme quadratique définie positive et que A correspond à un minimum local de f. A' correspond alors à un maximum local de f.

$$F''(B) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-12}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-12}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{60}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

. On remarque immédiatement que F''(B) n'est ni la matrice d'une forme quadratique définie positive, ni celle d'une forme quadratique définie négative (à cause du zéro en haut à gauche dans la matrice). détF''(B) $\neq 0$ donc F''(B) est la matrice d'une forme quadratique non dégénérée. Mais puisque détF''(B) < 0 les valeurs propres de F''(B) ne pouvant pas être toutes négatives (on a vu que la forme quadratique associée n'est pas définie négative) il y en a 2 positives et une négative.

B est donc un point col de f. Il en est de même pour B'.