Leçon 06 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 4 : Déterminer la nature de la forme quadratique q définie par $q(x,y,z) = 2x^2 - 4xy + 4xz + y^2 - 2yz + 4z^2$ en utilisant la méthode des mineurs. Donner la signature de q.

Solution

La matrice symétrique représentant q est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculons les premiers mineurs : $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} < 0$, donc q n'est pas définie positive.

-q a pour matrice $-A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ et les mineurs de –A sont : $\Delta_1 = -2 < 0$, donc -q n'est pas définie positive et q n'est pas définie négative.

D'autre part $\text{dét}A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 4 + 4 - (4 + 2 + 16) = -6 < 0$. détA étant le produit des valeurs propres de A, celles-ci sont non nulles. q est donc non dégénérée et par élimination q est indéfinie. On peut même préciser le signe des valeurs propres de A. En effet puisque A n'est pas définie négatives elles ne sont pas toutes négatives. Leur produit (détA) étant négatif, la seule solution est une valeur propre négative et deux positives. La signature de q est (2,1).