Leçon 06 – Correction des "Exercez-vous"

Exercez-vous 2 : En utilisant les résultats de l""Exercez-vous 1" où q est représentée par la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donner la nature de q (préciser si q est définie positive, ou négative, ou ….). En utilisant les notations précédentes, donner l'expression de q en fonction des coordonnées z_i de Z.
En déduire l'expression de q(x,y,z) en fonction de x, y et z sous la forme de sommes pondérées de carrés de combinaisons linéaires de x, y et z.

Solution

Les valeurs propres de A sont -1 et 2 donc q est indéfinie (change de signe).

Si $Z = P^{-1}X = {}^tPX = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ (coordonnées de X dans la base $\{P_1 , P_2 , P_3 \}$) :

$q(X) = 2z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$. Et en remplaçant z_1, z_2 et z_3 par leur valeur en fonction de x, y et z on obtient :

$$q(X) = 2\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{6}} + \frac{z}{\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{6}} - \frac{2z}{\sqrt{6}}\right)^2$$